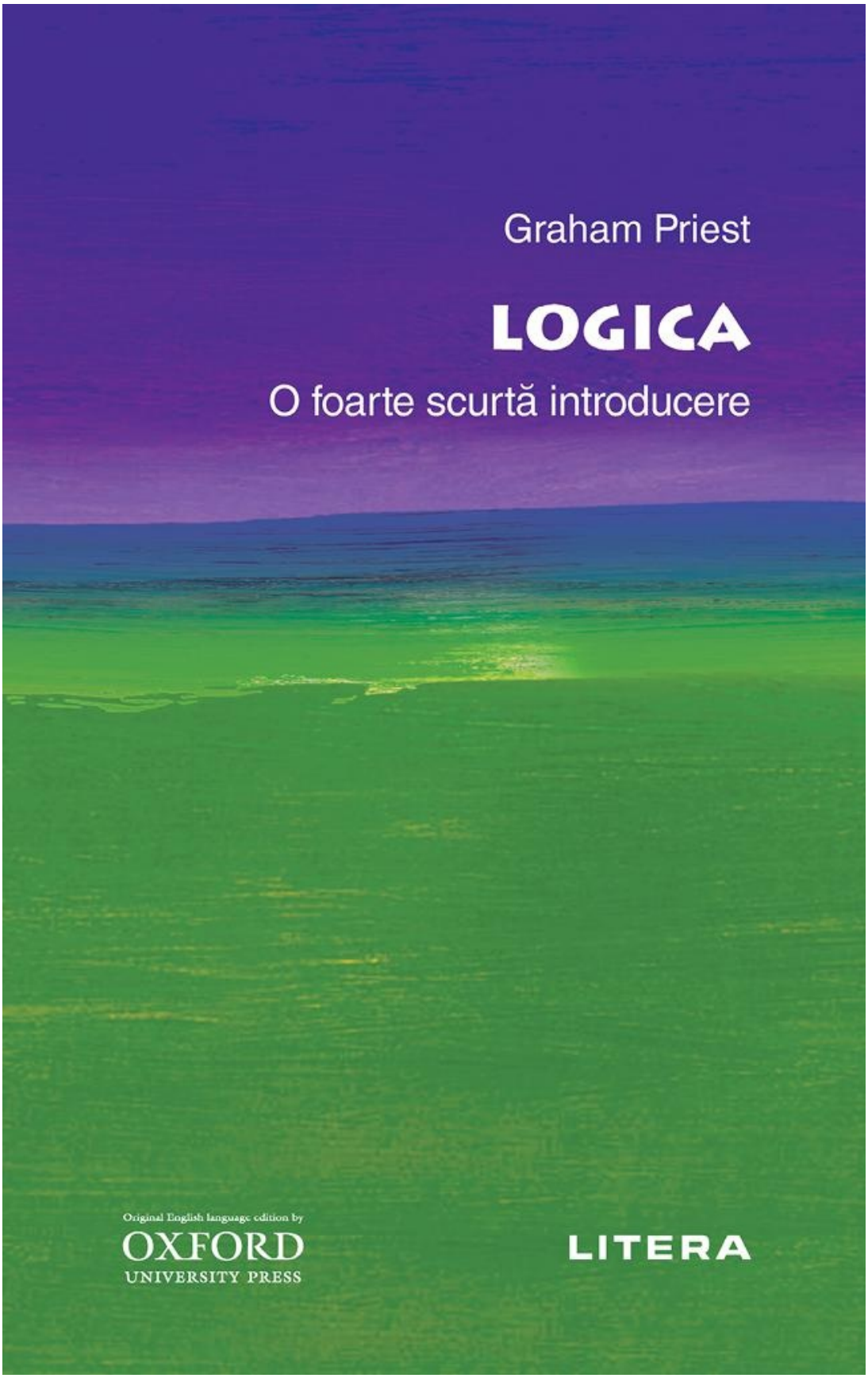
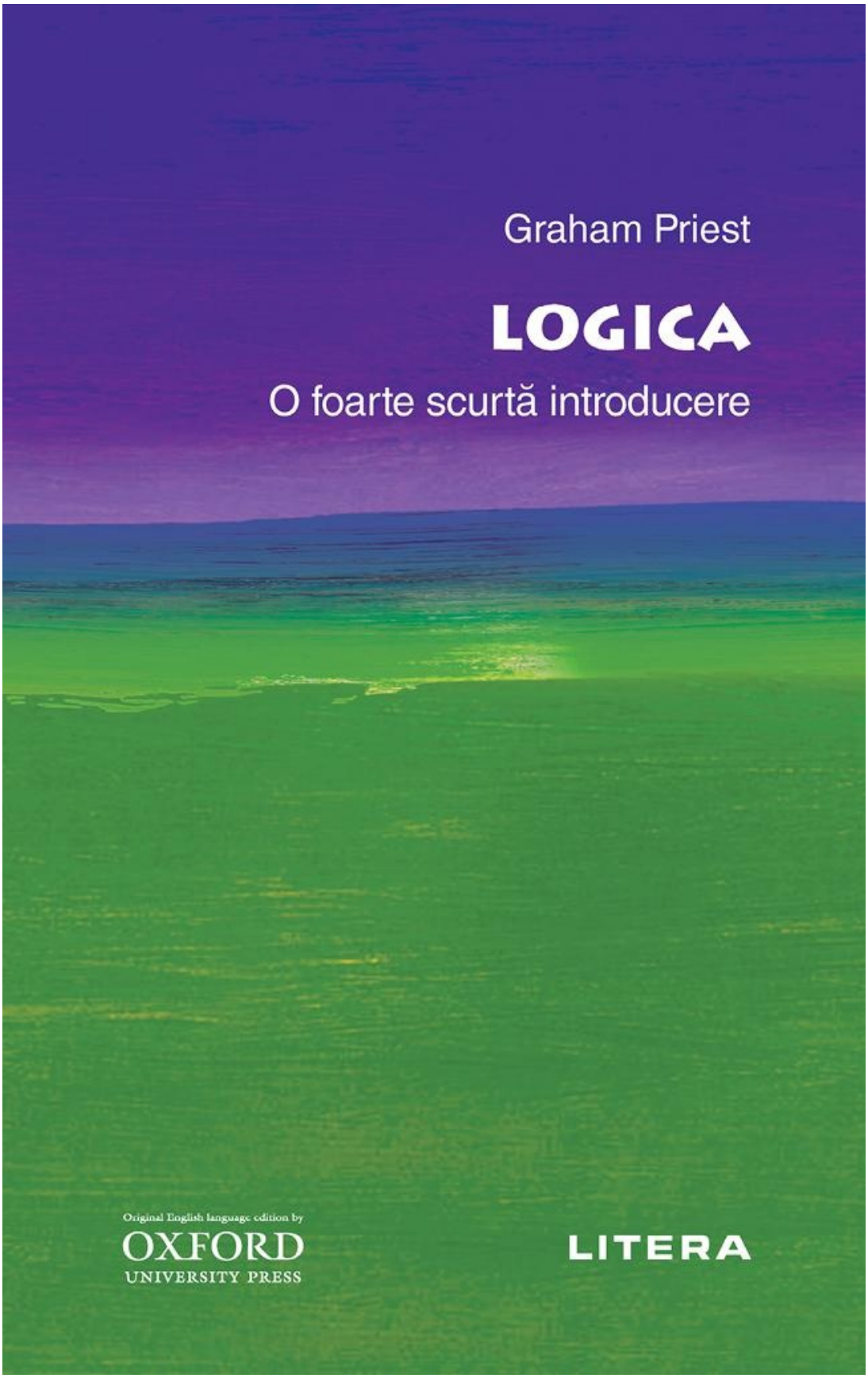
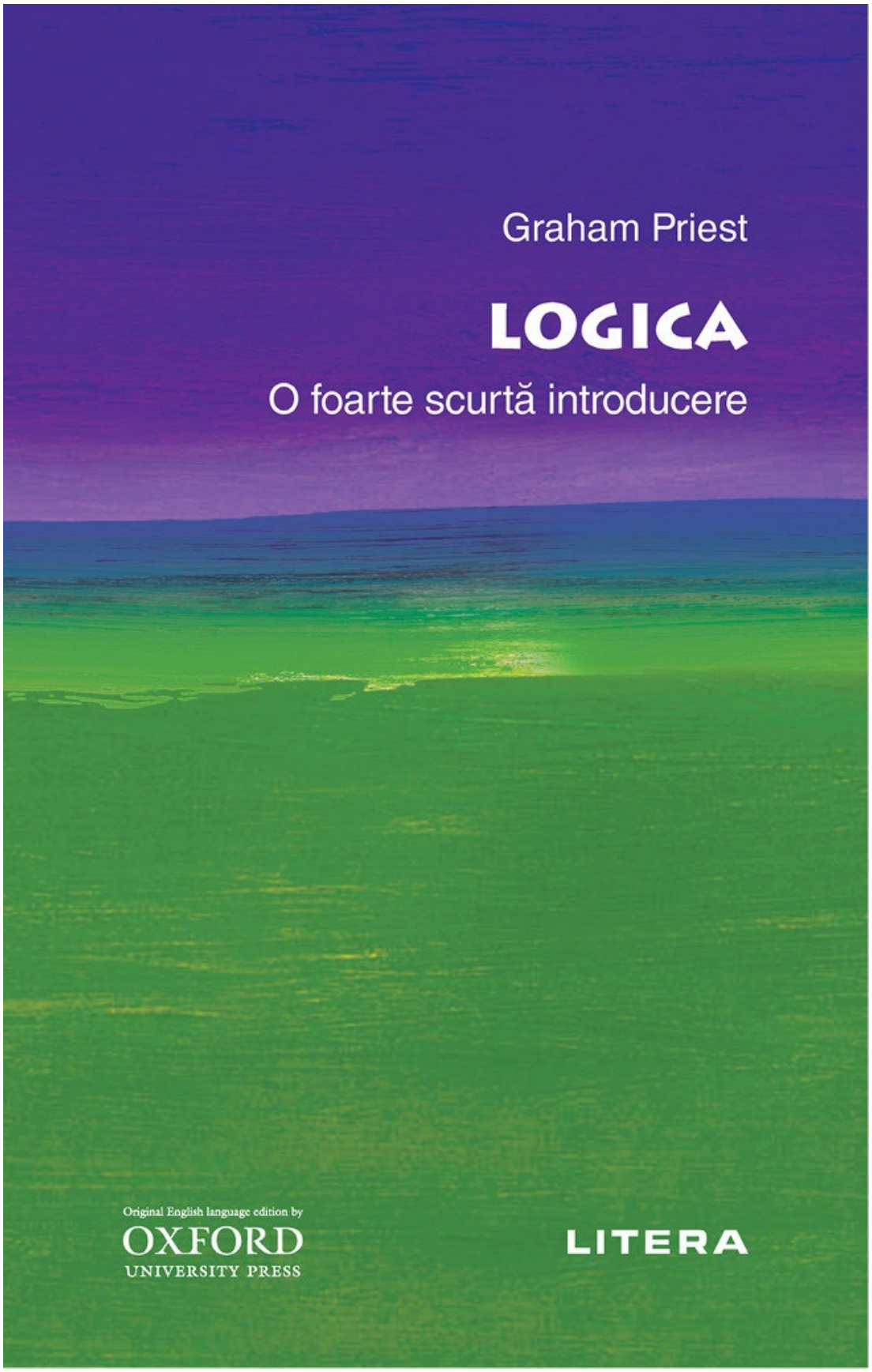

Graham Priest
LOGICA
O foarte scurtă introducere
Original English language edition by
OXFORD
UNIVERSITY PRESS
LITERA


Graham Priest
LOGICA
O foarte scurtă introducere
Original English language edition by
OXFORD
UNIVERSITY PRESS
LITERA


Graham Priest
LOGICA
O foarte scurtă introducere
Original English language edition by
OXFORD
UNIVERSITY PRESS
LITERA

Graham Priest

LOGICa

Această carte este dedicată tuturor celor

care s-au gândit vreodată la logică –

sau care se vor gândi vreodată.

Graham Priest

LOGICA

O foarte scurtă introducere

LITERA
București
2020

Logic

A Very Short Introduction

Graham Priest

Copyright © Graham Priest 2017

LITURA®

Editura Litera

O.P. 53; C.P. 212, sector 4, București, România

tel.: 021 319 63 90; 031 425 16 19; 0752 548 372;

e-mail: comenzi@litera.ro

Ne puteți vizita pe

www.litera.ro

Logica

O foarte scurtă introducere Graham Priest

Copyright © 2020 Grup Media Litera

Toate drepturile rezervate

Traducere din limba engleză:

Gabriel Tudor

Editor: Vidrașcu și fiii

Coordonare serie: Ilieș Câmpeanu

Redactor: Teodora Nicolau

Corector: Georgiana Enache

Copertă: Bogdan Mitea

Tehnoredactare și prepress: Marin Popa

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

PRIEST, GRAHAM

Logica: o foarte scurtă introducere / Graham Priest. – București: Litera, 2020

ISBN 978-606-33-6599-7

ISBN EPUB 978-606-33-6940-7

16

Prefață la prima ediție

Logica este una dintre cele mai vechi discipline intelectuale şi, în acelaşi timp, una dintre cele mai moderne. Începuturile ei datează din secolul al IV-lea î.Hr. Singurele discipline mai vechi decât ea sunt filosofia şi matematica, ambele însă strâns legate de logică. Disciplina a fost revoluţionată la începutul secolului XX prin aplicarea noilor tehnici matematice, iar în ultima jumătate de secol şi-a găsit utilizări radical noi şi importante în informatică şi procesarea informaţiei. Astfel, ea constituie un subiect esenţial pentru o mare parte a gândirii şi iniţiativei umane.

Această carte este o introducere în logică, aşa cum logicienii contemporani înţeleg acum subiectul. Însă ea nu încearcă să fie un manual. Există numeroase asemenea lucrări disponibile astăzi. Ideea celei de faţă este de a explora originile logicii, care se întrepătrund cu filosofia. O parte din logica formală va fi explicată pe parcurs.

În fiecare dintre capitolele principale, încep prin a aborda o anumită problemă filosofică sau un anumit joc logic. Apoi voi explica o anumită abordare faţă de acestea. Adesea, este o problemă standard; dar în unele zone nu există răspunsuri standard, dat fiind că logicienii nu s-au pus încă de acord. În asemenea cazuri, am ales pur şi simplu o abordare care este interesantă. Aproape toate abordările, indiferent că sunt standard sau nu, ar putea fi puse sub semnul întrebării. Închei fiecare capitol cu unele probleme legate de abordarea pe care am explicat-o. Uneori, aceste probleme sunt standard, alteori – nu. Uneori pot avea răspunsuri simple, alteori – nu. Obiectivul este de a te stimula să-ţi imaginezi cum ai putea folosi chestiunea în cauză.

Logica modernă este un subiect în mare măsură matematic. Am încercat să scriu materialul astfel încât să evit aproape complet matematica. Vei avea nevoie cel

mult de câteva noţiuni de algebră de liceu în capitolele 11–13. Este adevărat că va trebui să depui un oarecare efort pentru a stăpâni un simbolism nou pentru tine, dar într-o măsură mai mică decât ţi-ar fi necesar să înţelegi noţiunile de bază ale unei limbi noi. Iar caracterul inteligibil oferit de simbolism problemelor dificile face orice dificultate pe care o vei avea de depăşit să merite efortul. Un avertisment totuşi: să citeşti o carte despre filosofie sau logică nu e ca şi cum ai citi un roman. Vor exista momente când va trebui să citeşti încet şi cu atenţie. Uneori poate va trebui să te opreşti şi să te gândeşti la cele citite; şi ar trebui să fii pregătit să te întorci şi să recitești un paragraf, dacă va fi necesar.

Anexa „Puţină istorie şi lecturi suplimentare“ de la finalul cărţii este despre dezvoltarea logicii. Aici am încercat să situez în context istoric unele dintre chestiunile tratate în carte, pentru a arăta că logica este un subiect viu, care a evoluat permanent şi care va continua să evolueze. Secţiunea conţine, de asemenea, sugestii pentru alte cărţi pe care le-ai putea citi.

Există şi alte trei anexe. Prima conţine un glosar de termeni şi de simboluri. Ai putea să-l consulţi dacă uiţi sensul unui cuvânt sau al unui simbol. A doua anexă conţine o întrebare relevantă pentru fiecare capitol, prin care îţi poţi testa înţelegerea principalelor idei ale acestuia. A treia anexă conţine soluţiile problemelor. Această anexă nu a existat în primele tiraje ale primei ediţii, dar a fost adăugată la tirajele ulterioare.

Cartea se orientează mai mult pe amplitudine decât pe adâncime. S-ar fi putut scrie lesne o carte despre subiectul fiecăruia dintre capitolele sale – de fapt, chiar au fost scrise multe asemenea cărţi. Dar chiar şi aşa, există foarte multe chestiuni importante din logică pe care nu le-am abordat nici măcar în treacăt aici. Dar dacă vei citi cartea până la sfârşit, îţi vei putea face o idee destul de solidă despre fundamentele logicii moderne şi vei înţelege de ce oamenii consideră că merită să te gândeşti la subiect.

Prefață la ediția a doua

Prima ediție a acestei cărți a apărut în 2000. În 2016, Oxford University Press m-a abordat în legătură cu posibilitatea unei a doua ediții a lucrării. Reacția mea inițială a fost că o asemenea inițiativă nu se justifică. Dacă ar fi fost vorba, de pildă, despre o carte privind relații internaționale, cu siguranță ar fi fost învechită. Dar logica se dezvoltă, în general vorbind, într-un ritm mult mai lent. Materialul din prima ediție este la fel de valabil acum ca și atunci. Și nu cred că pot face o treabă mult mai bună în a acoperi acest domeniu pentru publicul căruia îi este destinată lucrarea. În cele din urmă, cartea s-a vândut bine, fiind tradusă în alte opt limbi (dacă am calculat corect).

Dar cei de la University Press mi-au arătat că în prima ediție nu folosisem toate cele 35 000 de cuvinte alocate și mi-au sugerat că aș putea adăuga câteva capitole noi. După ce m-am gândit ce-aș mai putea adăuga, mi-a venit o idee foarte bună. Prima ediție oferă într-un fel fundamentele logicii moderne, dar nimic mai mult. Logica este un subiect de mare profunzime și frumusețe, iar materialul din prima ediție nu transmite cu adevărat acest lucru. Două capitole suplimentare mi-ar fi permis să fac asta – cel puțin într-o anumită măsură: nu puteam spera că voi reuși ceva mai mult decât să zgârii suprafața materiei logicii într-o carte de asemenea natură. Dar noile capitole chiar oferă cititorului o privire dincolo de suprafață – sau cel puțin așa sper.

Așadar, cartea de față conține capitolele inițiale, în mare măsură așa cum erau, cu unele retușuri ocazionale. Capitolul 14, despre istorie, a devenit acum „Puțină istorie și lecturi suplimentare“ și există încă două capitole – 14 și 15 – care vorbesc despre Turing și Teorema opririi, respectiv despre Gödel și teoriile incompletitudinii. Am păstrat formatul primei ediții. Punctele-cheie ale fiecărui capitol sunt specificate la sfârșit. Materia istorică, problemele și glosarul au fost extinse pentru a acoperi noul material.

Noile capitole sunt, inevitabil, mai dificile decât cele anterioare; dar am făcut tot posibilul să le fac cât mai prietenoase pentru cititori. Cei care omit aceste capitole vor fi la fel de satisfăcuți ca aceia care au cumpărat prima ediție; iar cei care se aventurează să citească aceste două capitole își vor face, sper, cel puțin o impresie despre unde îi poate conduce materialul mai elementar.

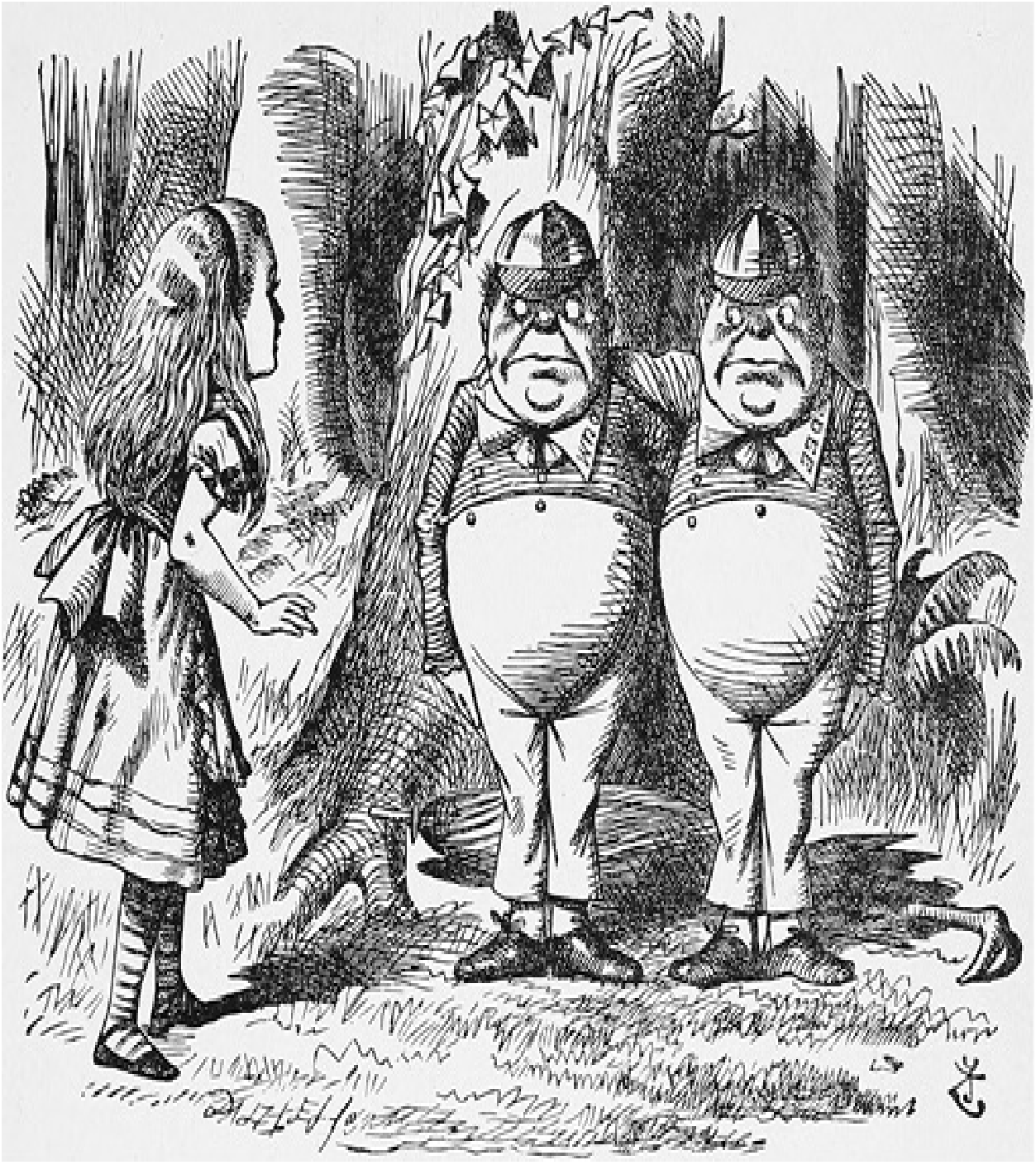
Capitolul 1. Validitate: ce anume decurge din ce?

Celor mai mulți oameni le place să creadă despre ei că sunt logici. Să-i spui cuiva „nu gândești logic“ reprezintă, în mod normal, o formă de a-l critica. Să fii ilogic înseamnă să fii confuz, încurcat, irațional. Dar ce este logica? În cartea lui Lewis Carroll Alice în Țara Oglinzilor, Alice se întâlnește cu doi frați gemeni care fac paradă de logica lor, Tweedledum și Tweedledee (figura 1). Când Alice rămâne fără cuvinte, ei trec la atac:

– Știu la ce te gândești, a spus Tweedledum, dar nu-i așa, nicidecum.

– Dimpotrivă, a continuat Tweedledee, dacă ar fi fost așa, ar fi putut să fie. Și dacă ar fi fost așa, așa ar fi fost, dar cum nu a fost așa, nu așa a fost. Este logic.

Ce face Tweedledee – cel puțin în parodia lui Carroll – este să raționeze. Și la asta, după cum spune el, se referă logica.



1. Tweedledum și Tweedledee dezbat cu Alice subtilitățile logicii.

Arhivă internet

Cu toţii raţionăm. Încercăm să ne dăm seama ce se întâmplă, raţionând pe baza lucrurilor pe care le ştim. Încercăm să-i convingem pe alţii că un anumit lucru este astfel oferindu-le argumente. Logica este studiul raţionamentelor considerate corecte pentru ce şi pentru de ce. Însă trebuie să înţelegem această afirmaţie într-un anumit mod. Iată două exemple de raţionamente – logicienii le numesc inferenţe:

1. Roma este capitala Italiei şi acest avion aterizează la Roma; deci, acest avion aterizează în Italia.

2. Moscova este capitala SUA; deci, nu poţi merge la Moscova fără să nu mergi în SUA.

În fiecare caz, afirmaţiile anterioare lui „deci“ – logicienii le numesc premise – oferă raţionamentul; afirmaţiile făcute după „deci“ – logicienii le numesc concluzii – trebuie să justifice raţionamentul. Primul raţionament este corect; dar al doilea este de-a dreptul absurd şi nu ar putea convinge nici un om care are cunoştinţe elementare de geografie: premisa că Moscova este capitala SUA este pur şi simplu falsă. De remarcat totuşi că, dacă premisa ar fi fost adevărată – dacă, să presupunem, SUA ar fi cumpărat toată Rusia (nu doar Alaska) şi ar fi mutat Casa Albă la Moscova, pentru a fi mai aproape de centrele de putere din Europa –, concluzia ar fi fost adevărată. Ea ar fi derivat din premise; şi cu acest lucru se ocupă logica. Acest domeniu nu-şi propune să stabilească dacă premisele unei deducţii sunt adevărate sau false. Acest lucru cade în sarcina altora (în cazul de faţă, a geografilor). Logica este interesată pur şi simplu să stabilească dacă respectiva concluzie decurge din premise. Pentru logicieni, o inferenţă este validă în cazul în care concluzia decurge din premise. Aşadar, obiectivul fundamental al logicii este să înţeleagă validitatea.

Ai putea crede că aceasta este mai curând o sarcină anostă – un exerciţiu

intelectual cumva mai puțin atractiv decât rezolvarea unui rebus. Dar materia se dovedește nu doar foarte dificilă, ci și una care nu poate fi despărțită de întrebări filosofice importante (și uneori profunde). Vom vedea unele dintre acestea pe parcursul cărții. Deocamdată, să aflăm mai multe despre faptele de bază legate strict de validitate.

Pentru început, să spunem că este obișnuit să faci distincția între două tipuri diferite de validitate. Ca să înțelegem acest aspect, să examinăm următoarele trei inferențe:

1. Dacă hoțul ar fi dat spargerea prin fereastra de la bucătărie, ar fi trebuit să fie urme de pași afară; dar nu există urme de pași, așadar hoțul nu a pătruns în casă prin fereastra de la bucătărie.

2. Se adună nori de furtună; prin urmare va ploua.

3. Se adună nori de furtună; prin urmare, hoțul nu a pătruns în casă prin fereastra de la bucătărie.

Inferența nr. 1 este una foarte directă. Dacă premisele sunt adevărate, și concluzia trebuie să fie. Sau, altfel spus, premisele nu ar putea fi adevărate fără ca și concluzia să fie adevărată. Logicienii numesc o inferență de acest tip validă deductiv. Inferența nr. 2 este un pic diferită. Premisa ne oferă clar un argument bun pentru concluzie, dar nu este complet concludentă. În definitiv, o schimbare bruscă a vântului poate duce norii într-o direcție diferită. Așadar, inferența nu este validă deductiv. De obicei, asemenea inferențe sunt numite valide inductiv. Dimpotrivă, inferența numărul 3 pare de-a dreptul absurdă, după orice standard. Premisa pare să nu ofere nici un fel de argument pentru concluzie. Ea este nevalidă – atât deductiv, cât și inductiv. De fapt, cum oamenii nu sunt complet idioți, dacă cineva chiar ar oferi un asemenea argument, am putea presupune că

există vreo premisă suplimentară pe care nu s-a obosit să ne-o dezvăluie (poate că hoților nu le place să rişte să stea în ploaie şi să se ude).

Validitatea inductivă constituie o noţiune foarte importantă. Raţionăm inductiv tot timpul; de exemplu, când încercăm să rezolvăm probleme cum ar fi de ce s-a stricat maşina, de ce o persoană s-a îmbolnăvit sau cine a comis o infracţiune. Logicianul fictiv Sherlock Holmes era un maestru al raționamentului inductiv. Totuși, din punct de vedere istoric s-au depus mai multe eforturi pentru înțelegerea validității deductive – poate fiindcă logicienii au avut tendința de a fi filosofi sau matematicieni (domenii în care inferențele valide deductiv au o importanţă fundamentală), nu medici sau detectivi. Vom reveni la noţiunea de inducție mai târziu pe parcursul acestei cărți. Deocamdată, să mai zăbovim puțin asupra validității deductive. (Este firesc să presupunem că validitatea deductivă este o noțiune mai simplă, deoarece inferențele valide sunt mai clare. Prin urmare, nu este o idee rea să încercăm să înțelegem mai întâi această noțiune. Este, aşa cum vom vedea, destul de dificil.) Până la o altă specificare, „valid“ va însemna pur şi simplu „valid deductiv“.

Deci ce este o inferență validă? După cum am văzut, una în care premisele nu pot fi adevărate fără ca şi concluzia să fie adevărată. Dar ce înseamnă asta? În particular, ce înseamnă „nu pot fi“? Să analizăm, de exemplu, propoziția: „Mary cântă la pian, dar John nu cântă“; aici discutăm despre abilități umane. Compară cu: „Nu poți merge acolo, îți trebuie un permis“; aici discutăm despre ce ne permite un anume cod de legi.

Este firesc să înțelegem astfel acest „nu pot fi“ ca relevant pentru cazul de față: să spui că premisele nu pot fi adevărate fără ca şi concluzia să fie adevărată înseamnă să afirmi că în toate situațiile în care toate premisele sunt adevărate, şi concluzia este adevărată. Până aici, ne-am înțeles; dar ce anume este o situație? Ce fel de lucruri intră în componența sa şi cum relaționează aceste lucruri unele cu altele? Și ce trebuie să fie adevărat? Ei bine, iată o problemă filosofică pentru tine, cum ar fi spus Tweedledee.

Aceste chestiuni ne vor preocupa din când în când; dar să le lăsăm deocamdată deoparte şi să mai stabilim un lucru. N-ar trebui să rămânem cu ideea că explicaţia validităţii deductive pe care tocmai am dat-o este, în sine, lipsită de probleme. (În filosofie, toate afirmaţiile interesante sunt supuse dezbaterii.) Iată una dintre probleme. Presupunând că explicaţia este corectă, pentru a şti că o deducţie este validă deductiv înseamnă să ştii că nu există situaţii în care premisele sunt corecte, iar concluzia nu este. Acum, în privinţa oricărei înţelegeri rezonabile a ce trebuie să însemne o situaţie, există o mulţime de sensuri: situaţii privind obiectele de pe planetele unor stele îndepărtate, situaţii despre evenimentele desfăşurate înainte ca în cosmos să existe vreo fiinţă vie, situaţii descrise în lucrări de ficţiune, situaţii imaginate de vizionari. Cum poate şti cineva ce ţine la un loc toate situaţiile? Mai grav, pare să existe un număr infinit de situaţii (situaţii de acum într-un an, situaţii de acum în doi ani, situaţii de acum în trei ani...). Prin urmare, este imposibil, chiar în principiu, să calculezi toate situaţiile. Deci dacă acest calcul de validitate este corect şi dat fiind faptul că putem recunoaşte deducţiile ca valide sau nevalide (cel puţin în multe cazuri), trebuie să avem câteva informaţii asupra acestui aspect dintr-o sursă specială. Ce sursă?

Este necesar să invocăm vreun fel de intuiţie mistică? Nu neapărat. Să luăm în considerare o problemă analogă. Cu toţii putem face diferenţa între succesiunile de cuvinte gramaticale şi cele non-gramaticale din limba noastră maternă, fără mari probleme. De exemplu, orice vorbitor nativ de română va recunoaşte că „Acesta este un scaun“ este o propoziţie gramaticală, în timp ce „Un scaun este un un“ nu este. Dar se pare că există un număr infinit de propoziţii gramaticale şi non-gramaticale. (De pildă, „Unu este un număr“, „Doi este un număr“, „Trei este un număr“ sunt toate propoziţii gramaticale. Şi este destul de uşor să produci salate de cuvinte ad libitum.) Deci cum facem asta? Poate cel mai influent lingvist contemporan, Noam Chomsky, a sugerat că putem face acest lucru deoarece colecţiile infinite sunt încapsulate într-un set finit de reguli înrădăcinate în noi şi că evoluţia ne-a programat să avem o gramatică înnăscută. Ar putea fi şi logica la fel? Sunt regulile logicii înrădăcinate în noi în acelaşi mod?

Ideile principale ale capitolului

- O inferență validă este una în care concluzia decurge din premisă (premise).
- O inferență validă deductiv este una pentru care nu există o situație în care toate premisele sunt adevărate, dar concluzia nu este adevărată.

Capitolul 2. Funcții de adevăr – sau nu?

Indiferent dacă regulile validității sunt adânc înrădăcinate în noi, cu toții avem intuiții puternice privind validitatea sau non-validitatea diferitelor inferențe. De exemplu, cădem cu toții de acord că următoarea inferență este validă: „Ea este femeie și bancher, prin urmare ea este bancher“. Sau că următoarea inferență este non-validă: „El este tâmplar, prin urmare este tâmplar și joacă baseball“.

Dar intuiția ne poate juca uneori feste. Ce crezi despre următoarea inferență? Cele două premise sunt scrise deasupra liniei, iar concluzia este scrisă dedesubt.

Regina este bogată. Regina nu este bogată.

Porcii pot zbura.

Cu siguranță nu pare validă. Bogăția reginei – considerabilă sau nu – ar părea să nu aibă nici o influență asupra abilităților de zbor ale porcilor.

Dar ce crezi despre următoarele două inferențe?

Regina este bogată.

Fie regina este bogată, fie porcii pot zbura.

Fie regina este bogată, fie porcii pot zbura. Regina nu este bogată.

Porcii pot zbura.

Prima dintre aceste inferențe pare validă. Să luăm în considerare concluzia ei. Logicienii numesc asemenea propoziții disjuncții; iar propozițiile de ambele părți ale lui „fie“ se numesc operand disjunctiv. Dar ce îi trebuie unei disjuncții să fie adevărată? Pur și simplu ca unul sau altul dintre operanzii disjunctivi să fie adevărat. Așadar, în orice situație în care premisa este adevărată, și concluzia este adevărată. A doua inferență pare, de asemenea, validă. Dacă una sau alta dintre cele două afirmații este adevărată și una dintre acestea nu este, cealaltă trebuie să fie adevărată.

Acum, problema este că, alăturând aceste două inferențe aparent valide, obținem inferențe aparent nevalide, precum:

Regina este bogată.

Fie regina este bogată, fie porcii pot zbura. Regina nu este bogată.

Porcii pot zbura.

Acest lucru nu poate fi corect. Această înlănțuire a inferențelor valide nu-ți poate da o inferență nevalidă. Dacă toate premisele sunt adevărate în orice situație, atunci sunt adevărate și concluziile lor – care decurg din acestea; și așa mai departe, până ajungem la concluzia finală. Ce n-a fost în regulă?

Pentru a oferi un răspuns ortodox la această întrebare, să ne concentrăm ceva mai mult pe detalii. Pentru început, să notăm propoziția „Porcii pot zbura“ ca p, iar propoziția „Regina este bogată“ ca q. Astfel, lucrurile devin ceva mai compacte; dar nu doar atât: dacă te gândești un moment, poți vedea că aceste două propoziții particulare folosite în exemplele de mai sus nu au prea mult de-a

face cu nimic; aş fi putut rezolva problema folosind practic orice alte două propoziţii; aşadar, putem să le ignorăm conţinutul, şi asta şi facem scriind propoziţiile ca simple litere.

Propoziţia „Fie regina este bogată, fie porcii pot zbura“ devine acum „Fie q sau p“. Logicienii notează adesea aceasta prin q ∨ p. Dar ce putem spune despre „Regina nu este bogată“? Să rescriem după cum urmează: „Nu este cazul că regina este bogată“, punând particula negaţiei în faţa propoziţiei. Ca atare, propoziţia devine „Nu este cazul ca q“. Adesea, logicienii scriu asta prin ¬q şi o numesc negaţia lui q. Şi, fiindcă tot am ajuns aici, ce putem spune despre propoziţia „Regina este bogată şi porcii pot zbura“, adică „q şi p“? Logicienii scriu adesea asta prin q & p şi o numesc conjuncţia dintre q şi p, q şi p fiind operanzi conjunctivi. Dispunând de acest mecanism, putem scrie astfel lanţul inferenţial pe care l-am întâlnit:

$$q$$

$$q \vee p \; \neg q$$

$$p$$

Ce putem spune despre această inferenţă?

Propoziţiile pot fi adevărate şi propoziţiile pot fi false. Să folosim A pentru adevărat şi F pentru fals. După unul dintre fondatorii logicii moderne, filosoful şi matematicianul german Gottlob Frege (figura 2), acestea sunt numite adesea valori de adevăr. Dată fiind orice propoziţie veche, a, care este conexiunea dintre valoarea de adevăr a lui a şi cea a negaţiei sale, ¬a? Un răspuns firesc este că, dacă una este adevărată, cealaltă este falsă, şi invers. Astfel, dacă „Regina este bogată“ este adevărată, „Regina nu este bogată“ este falsă, şi invers. Putem consemna aceasta după cum urmează:

¬a are valoarea A doar dacă a are valoarea F.

¬a are valoarea F doar dacă a are valoarea A.

Logicienii numesc acestea condiţii de adevăr pentru negaţie. Dacă presupunem că fiecare propoziţie este fie adevărată, fie falsă, dar nu ambele, putem reprezenta condiţiile în următorul tabel, pe care logicienii îl numesc tabel de adevăr:

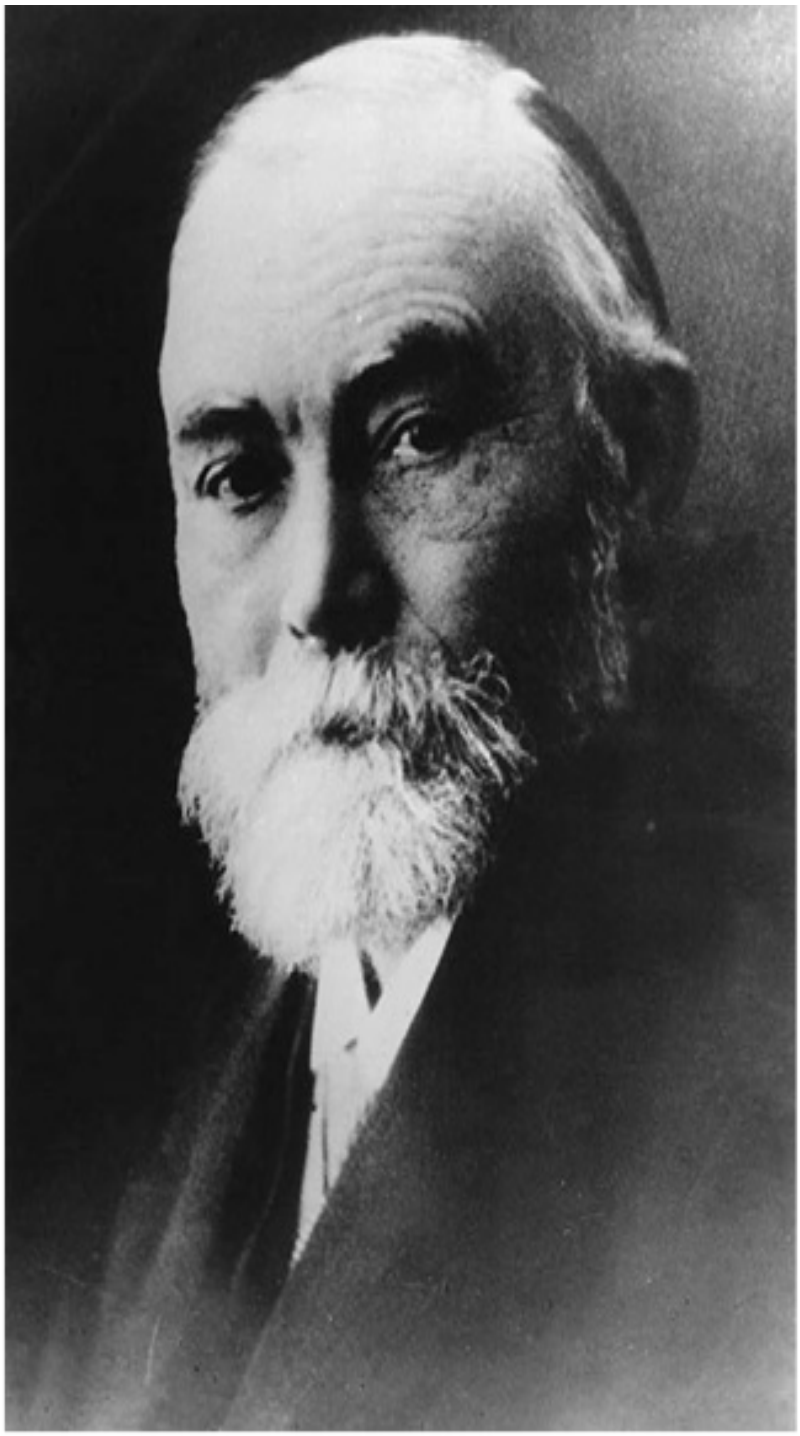
a	¬a
A	F
F	A

Dacă a are o valoare de adevăr dată în coloana de dedesubt, ¬a are valoarea corespondentă din dreapta.

Dar disjuncția, ∨ ? După cum am observat, o presupunere firească ar fi că o disjuncție a ∨ b este adevărată dacă una sau alta (sau poate ambele) dintre a și b sunt adevărate, și falsă în caz contrar. Putem consemna asta în condițiile de adevăr pentru disjuncție:

a ∨ b are valoarea A doar dacă cel puțin unul dintre a și b are valoarea A.

a ∨ b are valoarea F doar dacă ambele, a și b, au valoarea F.



2. Gottlob Frege (1848–1925), unul dintre fondatorii logicii moderne

© akg-images

Aceste condiții pot fi reprezentate în următorul tabel de adevăr:

a b	a ∨ b
A A A F F A F F	A A A F

Fiecare rând – cu excepţia celui dintâi, care este cap de tabel – înregistrează acum o posibilă combinaţie a valorilor pentru a (prima coloană) şi b (a doua coloană). Există patru asemenea combinaţii posibile şi prin urmare patru rânduri. Pentru fiecare combinaţie, valoarea corespunzătoare pentru a ∨ b este dată în dreapta (a treia coloană).

Din nou, dacă tot am ajuns aici, care este conexiunea dintre valorile de adevăr pentru a şi b şi cea pentru a & b? O presupunere naturală este că a & b este adevărată dacă şi a, şi b sunt adevărate, şi falsă în caz contrar. Astfel, de exemplu, „John are 35 de ani şi păr castaniu“ este adevărată doar dacă „John are 35 de ani“ şi „John are păr castaniu“ sunt ambele adevărate. Putem înregistra asta în condiţiile de adevăr pentru conjuncţie:

a & b are valoarea A doar dacă şi a, şi b au valoarea A.

a & b are valoarea F doar dacă cel puţin una dintre a şi b are valoarea F.

Aceste condiţii pot fi reprezentate în următorul tabel de adevăr:

a b	a & b
A A A F F A F F	A F F F

Acum, ce însemnătate au toate acestea pentru problema cu care am început? Să revenim la întrebarea pe care am ridicat-o către sfârşitul capitolului 1: ce este o situaţie? Un gând natural ar fi că, indiferent de ce este o situaţie, ea determină o valoare de adevăr pentru fiecare propoziţie. Prin urmare, de pildă, într-o anumită situaţie ar putea fi adevărat că regina este bogată şi că porcii pot zbura. Într-o alta ar putea fi fals că regina este bogată şi adevărat că porcii pot zbura. (De remarcat că aceste situaţii ar putea fi pur ipotetice!) Cu alte cuvinte, o situaţie determină fiecare propoziţie relevantă ca fiind fie A, fie F. Propoziţiile relevante de aici nu conţin vreo ocurenţă a termenilor „şi“, „sau“ ori „nu“. Dacă dispunem de informaţiile de bază privitoare la o situaţie, putem folosi tabele de adevăr pentru a stabili valorile de adevăr ale propoziţiilor.

De exemplu, să presupunem că avem următoarea situaţie:

p : A
q : F
r : A

(r ar putea fi propoziția „Rubarba este nutritivă“, iar „p : A“ înseamnă că lui p îi este atribuită valoarea de adevăr A etc.). Care este valoarea de adevăr a lui, să spunem, p & (¬r ∨ q)? Aflăm valoarea de adevăr din această construcție exact în același mod în care am afla valoarea numerică a lui 3 x (–6 + 2), folosind tabla înmulțirii și adunarea. Valoarea de adevăr a lui r este A. Așadar, tabelul de adevăr pentru ¬ ne spune că valoarea de adevăr a lui ¬r este F. Dar, cum valoarea lui q este F, tabelul de adevăr pentru ∨ ne spune că valoarea lui ¬r ∨ q este F. Și, cum valoarea de adevăr a lui p este A, tabelul de adevăr pentru & ne spune că valoarea lui p & (¬r ∨ q) este F. În acest mod, pas cu pas, putem afla valoarea de adevăr a oricărei formule care conține &, ∨ și ¬.

Acum, să ne reamintim din capitolul 1 că o inferență este validă numai dacă nu există nici o situație care face toate premisele adevărate și concluzia neadevărată (falsă). Adică este validă dacă nu există nici o modalitate de a desemna valori de A și F propozițiilor relevante, de unde rezultă că toate premisele au valoarea A și concluzia are valoarea F. Să luăm în considerare, de pildă, inferența cu care ne-am întâlnit deja, q / q ∨ p. (Scriu asta pe un singur rând ca să economisesc banii editurii.) Propozițiile relevante sunt q și p. Există patru combinații de valori de adevăr și pentru fiecare putem stabili valorile de adevăr pentru premise și concluzie. Putem reprezenta rezultatul după cum urmează:

q	p		q	q ∨ p
A A F F	A F A F		A A F F	A A A F

Primele două coloane ne oferă toate combinaţiile posibile ale valorilor de adevăr pentru q şi p. Ultimele două coloane ne oferă valorile de adevăr corespunzătoare pentru premise şi concluzie. A treia coloană este aceeaşi ca prima. Acesta este un acccident al exemplului de faţă, deoarece, în acest caz particular, premisa se întâmplă să fie una dintre propoziţiile relevante. A patra coloană poate fi citită direct din tabelul de adevăr pentru disjuncţie. Având această informaţie, putem vedea că inferenţa este validă, deoarece nu există rând în care premisa, q, este adevărată, iar concluzia, q ∨ p, nu este.

Dar ce putem spune despre inferenţa q ∨ p, ¬q / p? Procedând în acelaşi fel, obţinem:

q	p		q ∨ p ¬p	p
A A F F	A F A F		A F A F A A F A	A F A F

De această dată, există cinci coloane, deoarece există două premise. Valorile de adevăr ale premiselor și concluziei pot fi citite din tabelele de adevăr pentru disjuncție și negație. Și, la fel, nu există nici un rând în care amândouă premisele sunt adevărate, iar concluzia nu este. Prin urmare, inferența este validă.

Dar ce putem spune despre inferența cu care am început: q, ¬q / p ? Procedând ca până acum, obținem:

q	p		q ¬q	p
A A F F	A F A F		A F A F F A F A	A F A F

Încă o dată, inferența este validă, iar acum înțelegem și de ce. Nu există nici un rând în care ambele premise sunt adevărate, iar concluzia este falsă. De fapt, nu există nici un rând în care ambele premise sunt adevărate. Concluzia nici măcar nu mai contează! Uneori, logicienii descriu această situație spunând că acest tip de inferență validă este afectată de vacuitate, deoarece premisele nu ar putea fi niciodată adevărate împreună.

Iată așadar o soluție la problema cu care am început. Potrivit acestui calcul, intuițiile noastre inițiale privind această inferență au fost greșite. În definitiv, intuițiile oamenilor pot fi adesea înșelătoare. Pare evident pentru oricare om că Pământul este nemișcat – până când omul respectiv urmează un curs de fizică și descoperă că, de fapt, planeta se rotește prin spațiu. Putem oferi chiar și o explicație legată de motivul pentru care intuițiile noastre logice sunt greșite. Majoritatea inferențelor cu care ne confruntăm în practică nu sunt afectate de vacuitate. Intuițiile noastre se dezvoltă în acest gen de context și nu se aplică în general – așa cum obiceiurile pe care le construiești învățând să mergi (de pildă să nu te apleci într-o parte) nu funcționează întotdeauna în alte contexte (de exemplu, când înveți să mergi pe bicicletă).

Vom reveni asupra acestui punct într-un capitol ulterior. Dar să încheiem acest capitol cu o scurtă privire asupra preciziei mecanismului pe care l-am folosit. Aici, lucrurile nu sunt atât de clare pe cât am putea spera. Potrivit acestei relații, valoarea de adevăr a unei propoziții ¬a este complet determinată de valoarea de adevăr a propoziției a. Într-un mod similar, valorile de adevăr ale propozițiilor a ∨ b și a & b sunt complet determinate de valorile de adevăr pentru a și b. Logicienii numesc operațiile care funcționează astfel funcții de adevăr. Dar există motive întemeiate să presupunem că „sau“ și „și“, așa cum apar în limba noastră, nu sunt funcții de adevăr – cel puțin nu întotdeauna.

De exemplu, potrivit tabelului de adevăr pentru &, „a și b“ au întotdeauna valoare de adevăr ca „b și a“: adică sunt ambele adevărate dacă a și b sunt

ambele adevărate şi false în caz contrar. Dar să luăm în considerare propoziţiile:

1. John s-a lovit la cap şi a căzut.

2. John a căzut şi s-a lovit la cap.

Prima spune că John s-a lovit la cap şi apoi a căzut. A doua spune că John a căzut şi apoi s-a lovit la cap. În mod clar, prima propoziţie ar putea fi adevărată, în vreme ce a doua este falsă şi invers. Astfel, nu doar valorile de adevăr ale conjuncţiilor sunt importante, dar şi ce conjuncţie copulativă o cauzează pe cealaltă.

Probleme similare implică şi „sau“. Potrivit relaţiei avute, „a sau b“ este adevărată dacă una sau alta dintre a şi b este adevărată. Dar să presupunem că un prieten spune:

Fie vii acum, fie vom întârzia;

aşa că te duci. Dat fiind tabelul de adevăr pentru $\vee$, disjuncţia este adevărată. Dar să presupunem că descoperi că prietenul tău te-a indus în eroare: ai fi putut pleca şi cu o jumătate de oră mai târziu, şi tot ai fi ajuns la timp. În aceste circumstanţe, ai putea spune cu siguranţă că prietenul tău te-a minţit: ce a spus el a fost fals. Încă o dată, nu doar valorile de adevăr ale disjuncţiilor sunt importante, ci şi existenţa unei conexiuni de un anumit tip între ele.

Te voi lăsa să reflectezi la aceste chestiuni. Materialul pe care l-am studiat ne oferă cel puţin o relaţie funcţională asupra felului cum funcţionează anumite mecanisme logice; şi vom reveni asupra acestora în următoarele capitole, dacă

ideile din capitolele respective nu le vor înlocui explicit – ceea ce vor face uneori.

Mecanismele în discuţie funcţionează doar cu anumite tipuri de inferenţe – există şi numeroase altele. Abia am pornit la drum.

Ideile principale ale capitolului

- Într-o anumită situație, o valoare de adevăr unică (*A* sau *F*) este atribuită fiecărei propoziții relevante.
- ¬*a* este *A* dacă *a* este *F*.
- *a* ∨ *b* este *A* doar dacă cel puțin una dintre *a* și *b* este *A*.
- *a* & *b* este *A* doar dacă atât *a*, cât și *b* sunt *A*.

Capitolul 3. Nume și cuantori: este nimicul ceva?

Inferențele pe care le-am examinat în capitolul 2 implică formulări ca „sau“ și „nu este cazul ca“, termeni care se adaugă sau se alătură unor propoziții întregi pentru a construi alte propoziții întregi; dar există o mulțime de inferențe care par să funcționeze într-un mod total diferit. Să luăm, de pildă, inferența:

Marcus mi-a dat o carte.

Cineva mi-a dat o carte.

Nici premisa, nici concluzia nu are o parte care să reprezinte în sine o propoziție întreagă. Dacă această inferență este validă, aceasta se întâmplă datorită celor petrecute în interiorul propozițiilor întregi.

Gramatica tradițională ne spune că propozițiile întregi cele mai simple sunt compuse doar din subiect și predicat. Astfel, să luăm în considerare exemplele:

1. Marcus a văzut un elefant.

2. Annika a adormit.

3. Cineva m-a lovit.

4. Nimeni n-a venit la petrecerea mea.

În toate cazurile, primul cuvânt este subiectul propoziției: el ne spune despre

cine este vorba în propoziţie. Restul este predicatul: acesta ne spune ce se afirmă despre subiect. Acum, când o asemenea propoziție este adevărată?

Să luăm un al doilea exemplu. Propoziţia este adevărată dacă obiectul la care se face referire prin subiectul „Annika“ are proprietatea exprimată de predicat – adică „a adormit“.

Toate bune şi frumoase. Dar la cine se referă subiectul din propoziţia 3? La persoana care m-a lovit? Dar poate că nu m-a lovit nimeni. Nimeni nu a spus că aceasta a fost o propoziție adevărată. Cazul propoziției 4 este și mai complicat. La cine se referă „nimeni“? În Alice în Țara Oglinzilor, chiar înainte de întâlnirea ei cu Leul şi cu Unicornul, Alice se întâlneşte cu Regele Alb, care aşteaptă un sol. (Din nu ştiu ce motiv, atunci când solul apare, el seamănă izbitor cu un iepure (figura 3).) Când regele o vede pe Alice, îi spune:

–Uită-te pe drum şi spune-mi dacă vezi pe vreunul dintre ei [solii].

– Nimeni pe drum, a răspuns Alice.

– Ce n-aş da să am şi eu nişte ochi atât de buni! a spus Regele, pe un ton iritat. Să fii în stare să-l vezi pe Nimeni! Şi încă de la depărtare! Eu, pe lumina asta, nu văd decât oameni reali!

Carroll face o glumă de natură logică, aşa cum procedează adesea. Când Alice răspunde „nimeni“, ea nu afirmă că poate vedea o persoană – reală sau imaginară. „Nimeni“ nu se referă la o persoană – sau la orice altceva.

Cuvinte precum „nimeni“, „cineva“, „oricine“ sunt numite de logicienii moderni cuantori şi se diferenţiază de nume precum „Marcus“ şi „Annika“. Ceea ce tocmai am văzut este că, deşi atât cuantorii, cât şi numele pot fi subiecte gramaticale ale propoziţiilor, ele trebuie să funcţioneze în moduri total diferite. Aşadar, cum funcţionează cuantorii?

Iată un răspuns modern standard. O situaţie vine la pachet cu o serie de obiecte. În cazul nostru, obiectele relevante sunt toţi oamenii.

3. Nimeni

Arhivă internet

Toate numele care apar în raționamentul nostru despre această situație se referă la unul dintre obiectele din această colecţie. Astfel, dacă notăm m pentru „Marcus“, m se referă la unul dintre aceste obiecte. Și dacă scriem F pentru „este fericit“, atunci propoziția mF este adevărată doar în situația când obiectul la care m se referă are proprietatea exprimată de F. (Din motive complicate, logicienii inversează de obicei ordinea și scriu Fm în loc de mF. Aceasta este însă doar o convenție.)

Acum să luăm în considerare propoziția „Cineva este fericit“. Aceasta este adevărată doar în situația când există un obiect sau altul, în colecția de obiecte, care este fericit – adică un obiect din colecție, să-l numim x, este astfel încât x este fericit. Să scriem: „Un obiect, x, este astfel“, ca ∃x. Apoi am putea scrie propoziția ca „∃x x este fericit“; sau, amintindu-ne că am notat „este fericit“ ca F, am putea scrie astfel: ∃x xF. Uneori, logicienii numesc ∃x un cuantor particular.

Dar ce putem spune despre „Oricine este fericit“? Acest lucru este adevărat în situația când fiecare obiect din colecția relevantă este fericit. Adică fiecare obiect x din colecție este astfel încât x este fericit. Dacă scriem „Fiecare obiect x este astfel“ ca ∀x, atunci putem să scriem aceasta ca ∀x xF. Logicienii numesc de obicei ∀x cuantor universal.

Nu există premii pentru a ghici cum trebuie să înţelegem propoziția „Nimeni nu este fericit“. Aceasta înseamnă doar că nu există un obiect x în colecția - relevantă, astfel încât x este fericit. Am putea avea un simbol special care să însemne: „Nici un obiect x nu este astfel“, dar de fapt logicienii nu se deranjează cu așa ceva. Să spui că nimeni nu este fericit înseamnă să spui că nu este cazul ca să fie fericit cineva. Așadar, am putea scrie asta ca ¬∃x xF.

Această analiză a cuantorilor ne arată că numele și cuantorii acționează total diferit. În particular, faptul că „Marcus este fericit“ și „Cineva este fericit“ sunt

scrise, foarte diferit, ca mF și, respectiv, ∃x xH ne demonstrează acest lucru. Mai mult, ne arată că o formă gramaticală aparent simplă ar putea fi înșelătoare. Nu toate subiectele gramaticale sunt egale. Întâmplător, calculul ne arată de ce inferența cu care am început este validă. Să scriem D pentru „mi-a dat cartea“. Prin urmare, inferența este:

mD

∃x xD

Este clar că, dacă într-o situație obiectul la care ne referim prin numele m mi-a dat cartea, atunci un obiect din mulțimea relevantă mi-a dat cartea. Dimpotrivă, Regele Alb deduce din faptul că Alice nu a văzut pe nimeni faptul că ea a văzut pe cineva (adică pe Nimeni). Dacă scriem „este văzut de Alice“ ca A, atunci inferența Regelui Alb este:

¬∃x xA

∃x xA

Aceasta este în mod clar nevalidă. Dacă în domeniul relevant nu există nici un obiect care a fost văzut de Alice, este în mod evident neadevărat că în domeniul relevant există un obiect care a fost văzut de ea.

Ai putea crede că totul este mult zgomot pentru nimic – de fapt, e doar o modalitate de a strica o glumă bună. Dar de fapt lucrurile sunt mult mai serioase decât atât. Cuantorii joacă un rol crucial în multe argumente importante din matematică și filosofie. Iată un exemplu filosofic. Faptul că nimic nu se întâmplă fără a avea o explicație reprezintă o presupunere firească: oamenii nu se îmbolnăvesc din senin, mașinile nu se strică dacă nu au un defect. Așadar, totul

are o cauză. Dar care ar putea fi cauza tuturor lucrurilor? Firește, nu poate fi ceva fizic, de pildă o persoană sau chiar ceva precum acel Big Bang din cosmologie. Asemenea lucruri trebuie să aibă ele însele o cauză. Prin urmare, trebuie să fie ceva metafizic. Dumnezeu este un candidat evident.

Aceasta este o versiune a unui argument în sprijinul existenței lui Dumnezeu, numit adesea Argumentul Cosmologic. Cineva ar putea obiecta față de acest - argument în diferite moduri. Dar în esența sa, există o enormă eroare logică. Propoziția „Totul are o cauză“ este ambiguă. Ea poate însemna că tot ce se întâmplă are o cauză sau alta – adică pentru fiecare x există un y, astfel încât x să fie cauzat de y; sau ea poate însemna că există ceva care este cauza tuturor lucrurilor – adică există un y, astfel încât pentru fiecare x, x să fie cauzat de y. Să presupunem că ne gândim la domeniul relevant al obiectelor ca la niște cauze și efecte și scriem „x este cauzat de y“ ca xCy. Atunci putem scrie aceste două sensuri ca, respectiv:

1. ∀x ∃y xCy

2. ∃ y ∀x xCy

Dar aceste expresii nu sunt echivalente logic. Prima derivă din a doua. Dacă există un lucru care este cauza tuturor lucrurilor, atunci cu siguranță tot ce se întâmplă are o cauză sau alta. Dar dacă totul are o cauză sau alta, nu înseamnă că unul și același lucru este cauza tuturor lucrurilor. (Compară: Oricine are o mamă; dar de aici nu decurge că există cineva care este mama tuturor.)

Această versiune a Argumentului Cosmologic profită de ambiguitatea sa. Ceea ce este stabilit prin discuția despre boli și mașini este sensul 1. Dar imediat argumentul continuă să întrebe care este cauza, presupunând că sensul 2 a fost stabilit. Mai mult, acest cadru este ascuns deoarece propoziția „Totul are o

cauză“ poate fi folosită fie ca 1, fie ca 2. De notat, totodată, că nu există ambiguitate dacă vom înlocui cuantorii cu nume. „Radiația de fundal a cosmosului este cauzată de Big Bang“ nu este deloc o afirmație ambiguă. Se prea poate ca un eșec în a face distincția între nume și cuantori să reprezinte un alt motiv pentru care nu puteam observa ambiguitatea.

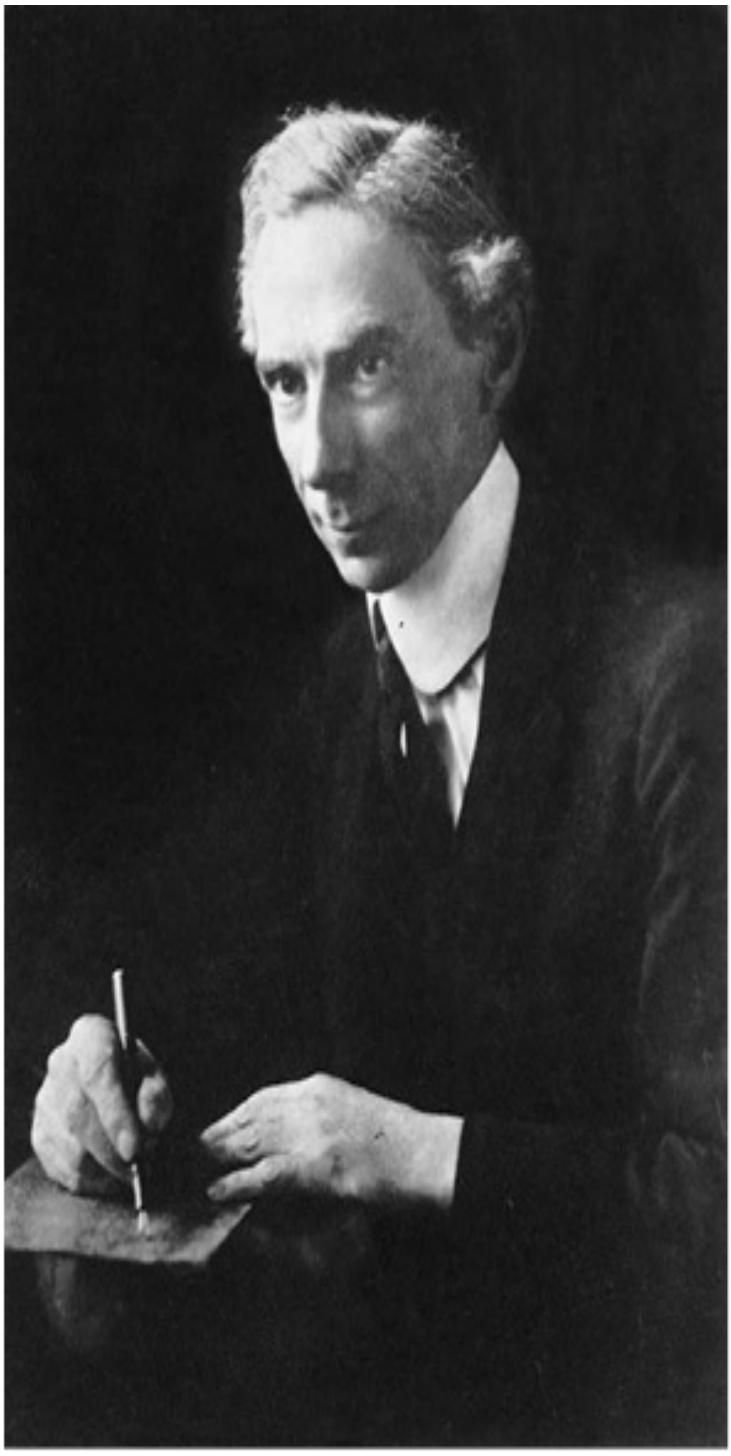
Așadar, o înțelegere corectă a cuantorilor este importantă – și nu doar pentru logică. Cuvintele „ceva“, „nimic“ etc. nu țin locul obiectelor, ci funcționează într-un mod complet diferit. Sau cel puțin pot funcționa: lucrurile nu sunt deloc atât de simple. Să revenim la cosmos. Acesta fie se întinde la infinit în timp, fie a apărut la un moment dat, bine definit. În primul caz, cosmosul nu are început, ci a existat întotdeauna; în al doilea, a început la un moment dat. De fapt, fizica ne-a spus în momente diferite lucruri diferite despre adevărul în această privință. Dar asta nu contează; să examinăm a doua posibilitate. În acest caz, cosmosul a apărut din nimic – sau cel puțin din nimic fizic, cosmosul fiind totalitatea lucrurilor fizice. Acum să examinăm propoziția „Cosmosul a apărut din nimic“. Să notăm cosmosul cu c și să scriem „x a apărut din y“ ca xEy. Atunci, dat fiind modul în care înțelegem cuantorii, această propoziție ar trebui să însemne ¬∃x cEx. Dar nu înseamnă asta, pentru că este la fel de adevărată în prima cosmologie alternativă. În aceasta, cosmosul, fiind infinit în timp, nu a apărut deloc. Așadar, în particular nu este cazul ca el să fi apărut din ceva sau din altceva. Când spunem că, potrivit celei de-a doua cosmologii, cosmosul a apărut din nimic, vrem să dăm de înțeles că a apărut din neant. Așadar, nimicul poate fi ceva. În definitiv, poate că Regele Alb nu era chiar atât de stupid.

Ideile principale ale capitolului

- Propoziția *nP* este adevărată într-o situație în care obiectul desemnat prin *n* are proprietatea exprimată de *P* în acea situație.
- $\exists x$ *xP* este adevărată într-o situație doar dacă un obiect din situație, *x*, este astfel încât *xP*.
- $\forall x$ *xP* este adevărată într-o situație doar dacă fiecare obiect din situație, *x*, este astfel încât *xP*.

Capitolul 4. Descrieri și existență: îl venerau grecii pe Zeus?

Fiindcă tot suntem la domeniul subiectelor și al predicatelor, există un anumit tip de sintagme care pot fi subiectul propozițiilor și despre care încă nu am discutat. De obicei, logicienii le numesc descrieri definite sau uneori doar descrieri – deși trebuie să te avertizez că acesta este doar un termen tehnic. Descrierile sunt sintagme precum „omul care a pus prima oară piciorul pe Lună“ și „singurul obiect făcut de om vizibil din spaţiu“. În general, descrierile au forma: un anumit lucru care satisface cutare și cutare condiție. Urmând exemplul filosofului și matematicianului englez Bertrand Russell (figura 4), unul dintre fondatorii logicii moderne, le putem scrie astfel: rescriem „omul care a pus prima oară piciorul pe Lună“ ca „obiectul x, astfel încât x este om și x a pus prima oară piciorul pe Lună“. Acum, scriem ιx pentru „obiectul x, astfel încât“ și acesta devine „ιx (x este om și x a pus prima oară piciorul pe Lună)“. Dacă scriem O pentru „este om“ și P pentru „a pus prima oară piciorul pe Lună“, atunci obținem: ιx(xO & xP). În general, o descriere are forma ιxcx, unde cx este o condiție conținând ocurențele lui x. (Iar indicele x se află acolo pentru a-ți reaminti asta.)



4. Bertrand Russell (1872–1970), unul dintre fondatorii logicii moderne

Colecție privată

Cum descrierile sunt subiecte, ele pot fi combinate cu predicate pentru a forma propoziţii întregi. Astfel, dacă notăm cu S „s-a născut în SUA“, atunci „omul care a pus prima oară piciorul pe Lună s-a născut în SUA“ este: ιx(xO & xP)S. Să scriem μ ca o prescurtare pentru ιx(xO & xP). (Folosesc litera grecească pentru a-ţi reaminti că este într-adevăr o descriere.) Aşadar, expresia devine μS. La fel, „Primul om care a pus piciorul pe Lună este un om şi a pus prima oară piciorul pe Lună“ devine μO & μP.

În termenii diviziunii din capitolul 3, descrierile sunt nume, nu cuantori. Adică ele se referă la obiecte – dacă suntem norocoși. Vom reveni. Astfel, „Omul care a pus prima oară piciorul pe Lună s-a născut în SUA“, μS, este adevărat doar dacă persoana particulară la care face referire fraza μ are proprietatea exprimată de S.

Dar descrierile sunt un tip special de nume. Spre deosebire de ceea ce am putea denumi nume proprii, precum „Annika“ și „Big Bang“, ele poartă informația despre obiectul la care se referă. Astfel, de pildă, „omul care a pus prima oară piciorul pe Lună“ poartă informația că obiectul de referință are proprietatea de a fi om și de a fi primul pe Lună. Toate acestea ar putea părea banale și evidente, dar lucrurile nu sunt chiar atât de simple precum par. Deoarece descrierile poartă informația astfel, ele sunt adesea esențiale pentru argumentele importante din matematică și filosofie; și o modalitate de a aprecia unele dintre aceste complexităţi este de a examina un asemenea argument, ca exemplu. Acesta este un alt argument pentru existența lui Dumnezeu, adesea numit Argumentul Ontologic. Argumentul cunoaște o serie de versiuni, dar iată o formă simplă a acestuia:

Dumnezeu este ființa cu toate perfecţiunile.

Dar existența este o perfecţiune.

Deci Dumnezeu posedă existență.

Cu alte cuvinte, Dumnezeu există. Dacă nu ai mai întâlnit acest argument înainte, el îţi va părea mai degrabă bulversant. Pentru început, ce este perfecţiunea? În mare, perfecţiunea este ceva similar omniscienţei (cunoașterea a tot ce există), omnipotenţei (capacitatea de a face tot ce poate fi făcut) și perfecţiunii morale (să acţionezi întotdeauna în cel mai bun mod posibil). În general, perfecţiunile sunt toate acele proprietăţi pe care ar fi bine să le avem. A doua premisă susţine că existența este o perfecţiune. Dar de ce ar trebui să fie astfel? Motivul pentru care am putea presupune că lucrurile ar trebui să stea așa este mai degrabă unul complex, avându-și originile în filosofia unuia dintre cei mai influenți filosofi antici greci, Platon. Din fericire, putem elabora pe marginea acestei chestiuni. Putem face o listă de proprietăţi ca omniscienţa, omnipotența etc., putem include existența pe listă și pur și simplu putem permite ca „perfecţiunea“ să însemne orice proprietate de pe listă. Mai mult, putem considera că „Dumnezeu“ este sinonim cu o anumită descriere, adică „fiinţa care posedă toate perfecţiunile (adică acele proprietăţi de pe listă)“. În cadrul Argumentului Ontologic, ambele premise sunt acum adevărate prin definiţie și deci scoase din cadru. Argumentul se reduce așadar la o singură afirmaţie:

Obiectul care este omniscient, omnipotent, perfect moral... și există, există

– și, am putea adăuga, este omnipotent, omniscient, perfect moral și așa mai departe. Cu siguranță acest lucru pare adevărat. Pentru a face lucrurile și mai limpezi, să presupunem că scriem lista proprietăţilor lui Dumnezeu ca P1, P2, ... Pn. Prin urmare, ultima, Pn, este existența. Definiţia lui „Dumnezeu“ este: ιx(xP1 &... & xPn). Să scriem asta ca γ. Atunci, observaţia devine γP1 &... & γPn (din care derivă γPn).

Acesta este un caz special al unui fapt mai general, anume: lucrul care satisface cutare și cutare condiţie satisface însăși acea condiţie. Acesta se numește adesea Principiul Caracterizării (un lucru posedă acele proprietăţi după care este caracterizat). Vom abrevia acest principiu sub forma PC. Deja am întâlnit un

exemplu de PC cu „primul om care a pus piciorul pe Lună este un om și a pus prima oară piciorul pe Lună“, μO & μP. În general, obținem un caz de PC dacă luăm o descriere ιxcx și o înlocuim pentru fiecare ocurență a lui x în condiția cx.

Pentru toată lumea, PC pare a fi adevărat prin definiție. Desigur, lucrurile au acele proprietăți care le caracterizează prin definiție. Din nefericire, în general acest lucru este fals deoarece multe lucruri care derivă de aici sunt indiscutabil neadevărate.

Pentru început, putem folosi asta pentru a deduce existența tuturor genurilor de lucruri care nu există cu adevărat. Să luăm în considerare numerele întregi (non-negative): 0, 1, 2, 3... Nu există cel mai mare. Dar folosind PC, putem demonstra existența celui mai mare. Fie cx condiția „x este cel mai mare număr întreg & x există“. Fie δ ιxcx. Atunci PC ne dă „δ este cel mai mare număr întreg și δ există“. Absurditățile nu se încheie aici. Să considerăm o persoană necăsătorită, să spunem papa. Putem dovedi că este căsătorit. Fie cx condiția „x s-a căsătorit cu papa“. Fie δ descrierea pentru ιxcx. PC ne oferă „δ s-a căsătorit cu papa“. Așadar, cineva s-a căsătorit cu papa, cu alte cuvinte papa este căsătorit.

Ce putem spune despre asta? Un răspuns modern destul de standard ar fi de genul următor: să luăm în considerare descrierea ιxcx. Dacă există un obiect unic care satisface condiția cx într-o situație, atunci descrierea se referă la el. Altfel, el nu se referă la nimic: este un „nume gol“. Astfel, există un x unic, cum ar fi că x este un om și că x a pus prima oară piciorul pe Lună: Neil Armstrong. Așadar, „x astfel încât x este om și x a pus prima oară piciorul pe Lună“ se referă la Neil Armstrong. Similar, există cel mai mic număr întreg, anume 0; ca atare, descrierea „obiectul care este cel mai mic număr întreg“ se referă la 0. Dar cum nu există cel mai mare număr întreg, „obiectul care este cel mai mare întreg“ nu reușește să se refere la nimic. Similar, descrierea „orașul din Australia care are peste un milion de locuitori“ nu are termen de referință. Și în acest caz nu pentru că nu ar exista astfel de orașe, ci pentru că există mai multe.

Dar ce legătură au toate acestea cu PC? Ei bine, dacă există un obiect unic care satisface cx într-o situaţie, atunci ιxcx se referă la el. Aşadar, instanţa conform căreia PC priveşte cx este adevărată: ιxcx este unul dintre lucrurile – de fapt unicul lucru – care satisface cx. În particular, cel mai mic număr întreg este (într-adevăr) cel mai mic număr întreg; oraşul care este capitala federală a Australiei este, într-adevăr, capitala federală a Australiei etc. Aşadar, unele instanţe ale PC sunt valabile.

Dar dacă nu există un obiect unic care să satisfacă cx? Dacă n este un nume şi P este un predicat, propoziţia nP este adevărată doar dacă există un obiect la care n se referă şi care are proprietatea exprimată de P. Ca atare, dacă n nu denumeşte nici un obiect, nP trebuie să fie fals. Astfel, dacă nu există nici un obiect unic care să aibă proprietatea P (dacă, de pildă, P este „este un cal înaripat“), atunci (ιx xP)P este fals. Aşa cum este de aşteptat, în aceste condiţii PC ar putea să nu fie valabil.

Dar ce înseamnă toate acestea pentru Argumentul Ontologic? Să ne reamintim că PC invocat aici este γP1 &... & γPn, unde γ este descrierea ιx(xP1 &... &xPn). Fie există ceva care satisface xP1 &... & xPn, fie nu există. Dacă există, trebuie să fie unic. (Nu pot exista două obiecte omnipotente: dacă eu sunt omnipotent, te pot împiedica să faci anumite lucruri, deci tu nu poţi fi omnipotent.) Aşadar, γ se referă la acest lucru, iar γP1 &... & γPn este adevărată. Dacă nu este adevărată, atunci γ nu se referă la nimic; aşadar, fiecare operand conjunctiv al lui γP1 &... & γPn este fals; la fel de falsă este prin urmare şi întreaga conjuncţie. Cu alte cuvinte, instanţa PC folosită în argument este suficient de adevărată dacă Dumnezeu există; dar este falsă dacă Dumnezeu nu există. Aşadar, dacă cineva susţine existenţa lui Dumnezeu, el poate invoca, pur şi simplu, această instanţă a PC, care ar însemna doar presupunerea a ceea ce se presupune că dovedeşte. Filosofii spun că un astfel de argument este un argument circular (petitio principii) adică este întemeiat exact prin ceea ce se află în întrebare. Şi, în mod clar, un argument circular nu funcţionează.

Cam atât despre Argumentul Ontologic. Să încheiem acest capitol observând că

prezentarea descrierilor pe care le-am explicat este problematică în anumite moduri. Potrivit acestei prezentări, dacă δP este o propoziție unde δ este o descriere care nu se referă la nimic, ea este falsă. Dar nu pare să fie valabil de fiecare dată. De exemplu, ar putea părea adevărat că zeul cel mai puternic din Grecia antică se numea „Zeus“, trăia pe Muntele Olimp, era venerat de greci și așa mai departe. Dar în realitate nu au existat nici un fel de zei greci. Dacă acest lucru este adevărat, atunci descrierea „cel mai puternic dintre zeii antici greci“ nu se referă la nimic. Dar în acest caz există propoziții adevărate subiect/predicat în care termenul subiect nu reușește să se refere la nimic, cum ar fi „cel mai puternic dintre zeii antici greci era venerat de greci“. Ca să ne exprimăm tendențios, la urma urmei există adevăruri și despre obiecte non-existente.

Ideile principale ale capitolului

- $(\iota x c_x)P$ este adevărată într-o situație doar dacă, în acea situație, există un obiect unic, *a*, care satisface c_x și *a*P.

Capitolul 5. Autoreferință: despre ce este acest capitol?

Adesea, lucrurile par simple când ne gândim la cazuri normale; dar acest lucru poate fi înșelător. Când luăm în considerare cazuri mai neobișnuite, simplitatea ar putea să dispară. La fel se întâmplă și cu referința. Am văzut în capitolul 4 că lucrurile nu sunt atât de clare pe cât ar putea presupune cineva, de îndată ce luăm în calcul faptul că unele nume s-ar putea să nu se refere la nimic. Alte complexități apar când luăm în considerare un alt tip de caz neobișnuit: autoreferința.

Este foarte posibil ca un nume să se refere la ceva din care face parte el însuși. De exemplu, să examinăm propoziția: „Această propoziție conține cinci cuvinte“. Cuvintele care formează subiectul propoziției, „această propoziție“, se referă la întreaga propoziție, din care numele este doar o parte. Lucruri similare se întâmplă într-un set de reguli care conțin propoziția „Aceste reguli ar putea fi revizuite printr-o decizie majoritară a Departamentului de Filosofie“ sau de o persoană care crede că „Dacă gândesc acest gând, înseamnă că sunt conștient“.

Acestea sunt cazuri de autoreferință relativ neproblematice. Există însă și alte cazuri, total diferite. De exemplu, să presupunem că cineva spune:

Această frază pe care o rostesc chiar acum este falsă.

Să numim această propoziție λ. Este λ adevărată sau falsă? Ei bine, dacă este adevărată, atunci ce spune ea este întocmai, deci λ este falsă. Dar dacă este falsă, de vreme ce exact asta susține, este adevărată. În ambele cazuri, λ va părea să fie atât adevărată, cât și falsă. Propoziția este ca banda lui Möbius (figura 5),

o configurație topologică în care, din cauza unei răsuciri, interiorul este exterior, iar exteriorul este interior: adevărul este falsitate, iar falsitatea este adevăr.

Să presupunem că cineva spune:

Această propoziție pe care o rostesc chiar acum este adevărată.

Este adevărat sau fals? Ei bine, dacă este adevărat, propoziția este adevărată, de vreme ce chiar asta susține. Iar dacă este falsă, atunci este falsă, deoarece ea susține că este adevărată.

Ca atare, atât presupunerea că este adevărată, cât și presupunerea că este falsă par să fie coerente. Mai mult, s-ar părea că nu există nici un alt fapt care să poată stabili ce valoare de adevăr are ea. Nu doar că ea are o valoare pe care nu o cunoaștem și chiar nu o putem cunoaște. Mai curând s-ar părea că nu există nimic care să o determine ca fiind fie adevărată, fie falsă. Ea ar putea părea a fi nici adevărată, nici falsă.

5. Banda lui Möbius. Interiorul este exterior, iar exteriorul este interior: adevărul este falsitate, iar falsitatea este adevăr. © Nick Koudis/Photodisc

Aceste paradoxuri sunt foarte vechi. Primul dintre ele pare să fi fost descoperit de filosoful antic grec Eubulide şi este numit adesea paradoxul mincinosului. Există mai multe paradoxuri de acelaşi tip, unele moderne şi jucând un rol crucial în părţi centrale ale raţionamentului matematic. Iată un alt exemplu. Un set este o mulţime de obiecte. Astfel, de pildă, cineva ar putea alcătui setul tuturor oamenilor, setul tuturor numerelor şi setul tuturor ideilor abstracte. Seturile pot fi membre ale altor seturi. Astfel, de pildă, setul tuturor oamenilor dintr-o încăpere este un set şi, ca atare, este membru al setului tuturor seturilor. Unele seturi pot fi chiar propriile membre: setul tuturor obiectelor menţionate pe această pagină este un obiect menţionat pe această pagină (tocmai l-am menţionat), aşadar un membru al lui însuşi: setul tuturor seturilor este un set, deci un membru al lui însuşi. Şi unele seturi nu sunt, cu certitudine, propriile membre: setul tuturor oamenilor nu este o persoană, şi deci nu este un membru al setului tuturor oamenilor.

Să luăm în considerare setul tuturor acestor seturi care nu sunt membre ale lor însele. Să îl numim R. Este R un membru al lui însuşi sau nu? Dacă este membru al lui însuşi, atunci este unul dintre lucrurile care nu sunt membre ale lor însele şi, ca urmare, nu este un membru al lui însuşi. Dacă, pe de altă parte, nu este membru al lui însuşi, este unul dintre acele seturi care nu sunt membre ale lor însele şi prin urmare este un membru al lui însuşi. S-ar părea că R este şi nu este membru al lui însuşi.

Acest paradox a fost descoperit de Bertrand Russell, cu care am făcut cunoştinţă în capitolul 4, şi de aceea este numit paradoxul lui Russell. Ca şi paradoxul mincinosului, el are o formulare înrudită. Ce putem spune despre setul tuturor seturilor care sunt membre ale lor însele? Este acesta un membru al lui însuşi sau nu este? Ei bine, dacă este, este; şi dacă nu este, nu este. Şi aici s-ar părea că nu există nimic care să fie în stare să tranşeze chestiunea.

Exemplele de acest tip nu fac decât să sfideze presupunerea pe care am făcut-o

în capitolul 2 – că fiecare propoziție este fie adevărată, fie falsă, dar nu amândouă. „Această propoziție este falsă“ și „R nu este un membru al lui însuși“ par să nu fie nici adevărate, nici false.

Cum poate fi acceptată această idee? Pur și simplu prin luarea în calcul a altor posibilități. Să presupunem că în orice situație fiecare propoziție este adevărată, dar nu falsă; falsă, dar nu adevărată; atât falsă, cât și adevărată sau nici adevărată, nici falsă. Ne reamintim din capitolul 2 care sunt condițiile de adevăr pentru negație, conjuncție și disjuncție. În orice situație:

¬a are valoarea A doar dacă a are valoarea F.

¬a are valoarea F doar dacă a are valoarea A.

a & b are valoarea A doar dacă și a, și b au valoarea A.

a & b are valoarea F doar dacă cel puțin una dintre a și b are valoarea F.

a ∨ b are valoarea A doar dacă cel puțin unul dintre a și b are valoarea A.

a ∨ b are valoarea F doar dacă ambele, a și b, au valoarea F.

Folosind aceste informații, este ușor să stabilim valorile de adevăr ale propozițiilor complexe, sub noul regim. Unele exemple:

• Să presupunem că avem următoarea situație:

× √ a: A, F

Semnul √ înseamnă că a are valoare de adevăr; semnul X înseamnă că nu are.) Aşadar, ¬a are valoarea A (după prima clauză pentru negaţie) şi ¬a nu are valoarea F (după a doua clauză).

• Sau în următorul exemplu:

√ √ a: A, F √ × b: A, F

a & b are valoarea A (după prima clauză pentru conjuncţie) şi a & b are valoarea F (după a doua clauză).

• Iar în următorul exemplu:

√ × a: A, F × × b: A, F

a ∨ b are valoarea A (după prima clauză pentru disjuncţie) şi a ∨ b are valoarea F (după a doua clauză).

Ce ne spune aceasta despre validitate? Un argument valid este unul în care nu există situaţie unde premisele sunt adevărate şi concluzia nu este adevărată. Şi o situaţie este încă un lucru care dă o valoare de adevăr fiecărei propoziţii relevante. Doar acum, situaţia ar putea da unei propoziţii o valoare de adevăr, două sau nici una. Aşadar, să luăm în considerare inferenţa q/q ∨ p. În orice situaţie unde q are valoarea A, condiţiile pentru ∨ ne asigură că q ∨ p are, de asemenea, valoarea A. (Ar putea avea şi valoarea F, dar nu contează.) Astfel, dacă premisele au valoarea A, la fel are şi concluzia. Inferenţa este validă.

În acest punct, este util să revenim la inferenţa cu care am început capitolul 2: q, ¬q/p. După cum am văzut în capitolul respectiv, date fiind presupunerile de acolo, această inferenţă este validă. Dar date fiind noile presupuneri, lucrurile sunt diferite. Pentru a vedea de ce, să examinăm o situaţie unde q are valorile A şi F, dar p are doar valoarea F. Cum q este atât A, cât şi F, ¬q este de asemenea atât A, cât şi F. Ca atare, ambele premise sunt A (şi F, de asemenea, dar asta nu este relevant) şi concluzia, p, nu este A. Aceasta ne oferă un alt diagnostic privind motivul pentru care inferenţa ni se pare intuitiv nevalidă. Ea este nevalidă.

Dar lucrurile nu se opresc aici. Aşa cum am văzut în capitolul 2, această inferenţă urmează din alte două inferenţe. Prima dintre acestea (q/q ∨ p) am văzut că este validă, pe baza prezentei relaţii. Cealaltă trebuie să fie, prin urmare, nevalidă; şi aşa este. Cealaltă inferenţă este:

$$q \vee p \; \neg q$$

$$p$$

Acum să luăm în considerare o situaţie în care q primeşte valorile A şi F, iar p primeşte doar valoarea F. Este destul de uşor să verificăm că ambele premise primesc valoarea A (ca şi F). Dar concluzia nu primeşte valoarea A. De aici rezultă că inferenţa este nevalidă.

În capitolul 2 am spus că această inferenţă pare intuitiv validă. Aşadar, dată fiind noua relaţie, intuiţiile noastre despre aceasta trebuie să fie greşite. Dar pentru acest fapt s-ar putea găsi o explicaţie. Inferenţa pare validă deoarece dacă ¬q este adevărată, aceasta pare să elimine adevărul lui q, lăsându-ne doar cu p. Dar pe baza prezentei relaţii, adevărul lui ¬q nu îl exclude pe cel al lui q. S-ar întâmpla astfel doar dacă ceva nu ar putea fi simultan atât adevărat, cât şi fals. Când considerăm o inferenţă ca validă, uităm poate asemenea posibilităţi, care pot apărea în cazuri neobişnuite, precum acelea oferite de autoreferinţă.

Care explicaţie a situaţiei este mai bună, cea cu care am încheiat capitolul 2 sau cea pe care o avem acum? Aceasta este o întrebare la care te voi lăsa să reflectezi. Să încheiem, în schimb, observând că, la fel ca întotdeauna, cineva ar putea pune sub semnul întrebării unele dintre ideile pe care se bazează noua relaţie. Să luăm în considerare paradoxul mincinosului şi formularea sa înrudită. Mai întâi, să o analizăm pe cea de-a doua. Propoziţia „Această propoziţie este adevărată“ a fost gândită ca un exemplu despre ceva care nu este nici adevărat, nici fals. Să presupunem că este aşa. Prin urmare, în particular, propoziţia nu este adevărată. Dar chiar ea afirmă că este adevărată. Aşadar trebuie să fie falsă, contrar presupunerii noastre că nu este nici falsă, nici adevărată. Se pare că ne-am ales cu o contradicţie. Sau să luăm propoziţia mincinosului: „Această propoziţie este falsă“. Ea a fost gândită ca un exemplu de propoziţie care este simultan adevărată şi falsă. Să o modificăm puţin. Să luăm în considerare, în schimb, propoziţia: „Această propoziţie nu este adevărată“. Care este valoarea ei de adevăr? Dacă este adevărată, atunci se întâmplă ceea ce afirmă ea; aşadar, nu este adevărată. Dar atunci, dacă nu este adevărată, de vreme ce este ceea ce afirmă, este adevărată. În ambele cazuri, ar putea să fie simultan atât adevărată, cât şi neadevărată. Iarăşi avem de-a face cu o contradicţie. Nu înseamnă doar că o propoziţie ar putea lua valorile A şi F, ci, mai curând, o propoziţie poate fi

şi nu poate fi A.

Situații de acest gen au transformat subiectul autoreferinței într-unul controversat, încă de la Eubulide. Este, într-adevăr, o chestiune încâlcită.

Ideile principale ale capitolului

- Propozițiile pot fi adevărate, false, atât false, cât și adevărate sau nici false, nici adevărate.

Un comentariu final: pentru a evita posibilele neînțelegeri, precizez că în capitolele care urmează voi rezuma presupoziția că afirmațiile sunt adevărate sau false, dar nu ambele sau nici unele false sau adevărate – cu excepția capitolului 10 (despre logica vagă).

Capitolul 6. Necesitate și posibilitate: ce va fi trebuie să fie?

Adesea pretindem nu doar că un lucru este într-un fel, ci și că trebuie să fie astfel. Spunem: „Trebuie să plouă“, „Sigur are să plouă“, „Neapărat o să plouă“. De asemenea, avem multe feluri de a spune că, deși uneori, de fapt, nu ar fi cazul să se întâmple, s-ar putea întâmpla. Spunem: „S-ar putea să plouă mâine“, „Este posibil să plouă mâine“, „Nu este deloc imposibil ca mâine să plouă“. Dacă a este orice propoziție, logicienii de obicei scriu afirmația că a trebuie să fie adevărată ca ¨a și afirmația că a ar putea fi adevărată ca ◊a.

¨ și ◊ se numesc operatori modali, deoarece exprimă modurile cu ajutorul cărora lucrurile sunt adevărate sau false (necesar, posibil). Cei doi operatori sunt, de fapt, conectați. A spune că trebuie să fie adevărat ceva înseamnă a spune că nu este posibil să nu fie. Adică ¨a înseamnă același lucru ca ¬◊¬a. La fel, a spune că este posibil să fie adevărat ceva înseamnă a spune că nu este necesar ca acel ceva să fie fals. Adică ◊a înseamnă același lucru ca ¬¨¬a. În plus, putem exprima faptul că este imposibil ca a să fie adevărat, indiferent, ca ¬◊a (nu este posibil ca a) sau ¨¬a (a este necesar fals).

Spre deosebire de operatorii pe care i-am întâlnit până acum, ¨ și ◊ nu sunt funcții de adevăr. Așa cum am văzut în capitolul 2, când știi valoarea de adevăr a lui a, poți stabili valoarea de adevăr a lui ¬a. La fel, când știi valorile de adevăr ale lui a și b, poți afla valorile de adevăr ale lui a v b și a & b. Dar nu poți deduce valoarea de adevăr a lui ◊a pur și simplu din cunoașterea valorii de adevăr a lui a. De exemplu, fie t propoziția: „Mâine mă voi trezi înainte de ora 7 a.m.“: t este, de fapt, falsă. Dar cu siguranță ar putea fi adevărată: aș putea să-mi pun ceasul deșteptător la ora fixată și să mă trezesc devreme. Ca atare, ◊t este adevărată. Prin contrast, fie s propoziția: „Voi sări din pat și voi pluti la doi metri înălțime deasupra pământului“. Ca și t, aceasta este falsă. Dar, spre deosebire de t, nici măcar nu este posibil să fie adevărată deoarece ar încălca legea gravitației. Ca

atare, ◊s este falsă. Aşadar, valoarea de adevăr a unei propoziţii, a, nu o determină pe cea a propoziţiei ◊a; t şi s sunt ambele false, dar ◊t este adevărată şi ◊s este falsă. Similar, valoarea de adevăr a lui a nu determină valoarea de adevăr a lui ¨a. Acum, fie t propoziția: „Mâine mă voi trezi înainte de ora 8 a.m.“ Aceasta este, de fapt, adevărată, dar nu este în mod necesar adevărată. Aş putea rămâne în pat. Acum, fie s propoziția: „Dacă sar din pat mâine dimineaţă, mă voi fi mişcat“. Și aceasta este adevărată, dar sub nici o formă nu poate fi falsă. Este în mod necesar adevărată. Ca atare, t şi s sunt ambele adevărate, dar una este în mod necesar adevărată, şi cealaltă nu este.

Operatorii modali sunt prin urmare operatori de un tip total diferit de tot ce am întâlnit până acum. Ei sunt operatori importanți, dar totodată pot genera confuzii. Pentru a ilustra acest lucru, iată un argument pentru fatalism, dat de celălalt dintre cei doi cei mai influenți filosofi antici greci, Aristotel (figura 6).

Fatalismul este viziunea potrivit căreia orice se întâmplă trebuie să se întâmple: nu ar putea fi evitat. Când are loc un accident sau o persoană moare, nu există nimic care s-ar fi putut face pentru a preveni acest lucru. Fatalismul este o viziune apreciată de unii. Când ceva merge rău, există un anumit grad de consolare ce poate fi derivat din gândul că lucrurile nu ar fi putut să se desfășoare altfel. Cu toate acestea, fatalismul implică faptul că sunt neputincios în a schimba ce se întâmplă – şi aceasta pare cu totul fals. Dacă sunt implicat astăzi într-un accident rutier, aş fi putut să-l evit pur şi simplu luând-o pe altă rută. Aşadar, care este argumentul lui Aristotel? El sună în felul următor. (Ignoră, deocamdată, cuvintele scrise cu bold, vom reveni asupra lor.)

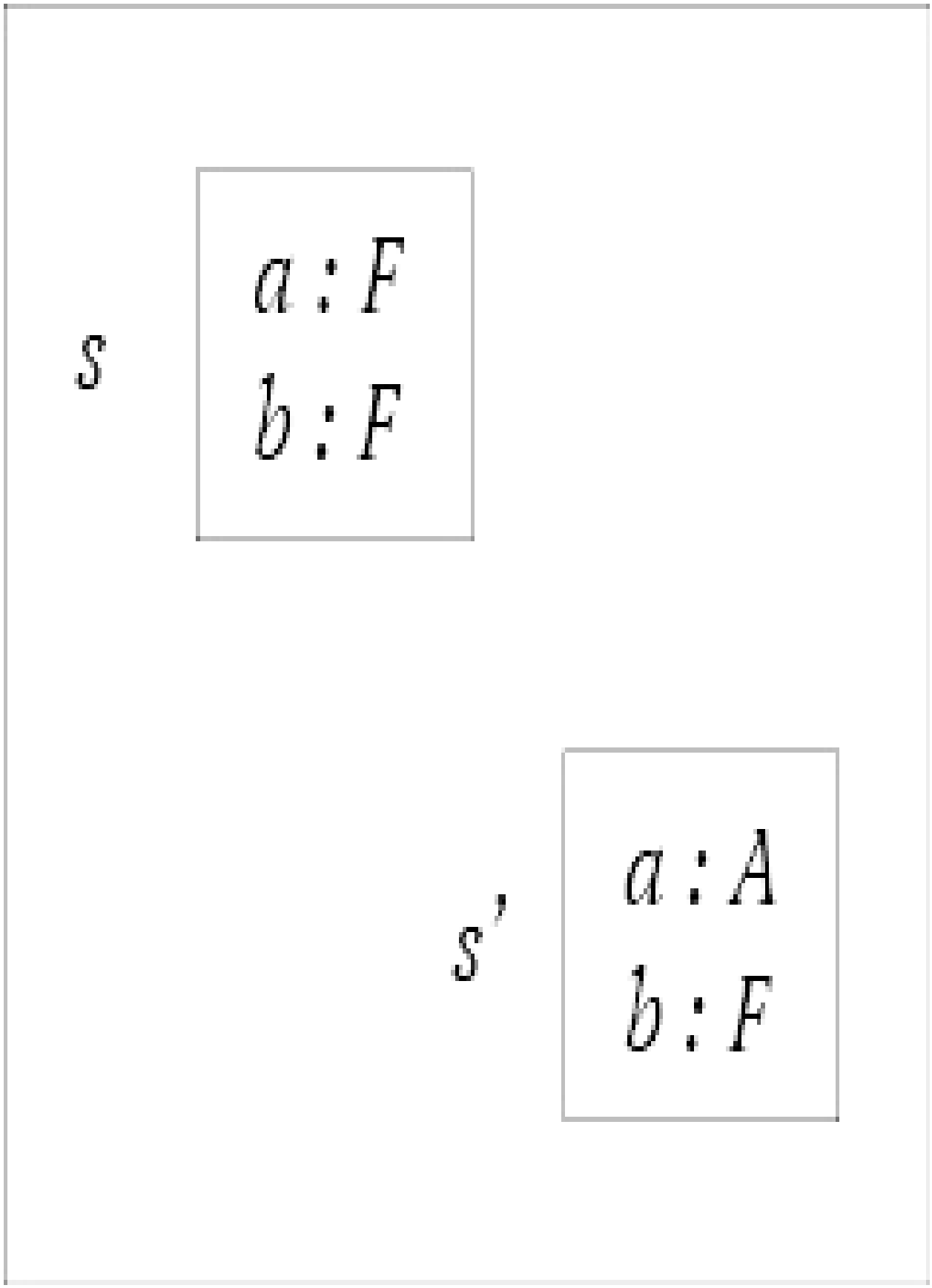
Fă orice presupunere dorești – să spunem, pentru a da un exemplu, că vei fi implicat într-un accident rutier mâine. Am putea să nu știm dacă acest lucru este sau nu adevărat, dar știm că fie voi fi implicat într-un accident, fie nu voi fi. Să presupunem prima variantă. Atunci, de fapt, voi fi implicat într-un accident rutier. Și dacă este adevărat să spun că voi fi implicat într-un accident, atunci nu se poate întâmpla altfel decât să fiu implicat într-un accident. Adică, trebuie să se întâmple să fiu implicat. Pe de altă parte, să presupunem că, de fapt, nu voi fi

implicat într-un accident rutier mâine. Atunci este adevărat să spun că nu voi fi implicat într-un accident; și dacă este așa, atunci nu se poate întâmpla altfel decât să nu fiu implicat într-un accident. Adică trebuie să se întâmple să nu fiu implicat într-un accident. Așadar, oricare dintre aceste două situații chiar se întâmplă, trebuie să se întâmple. Acesta este fatalismul.

6. Aristotel (384–322 î.Hr.), fondatorul logicii formale

© 2006 Alinari/TopFoto

Dar ce putem spune despre asta? Pentru a răspunde, să examinăm definiția modernă standard a operatorilor modali. Presupunem că fiecare situaţie, s, vine la pachet cu o serie de posibilități, adică situaţii care sunt posibile pe parcursul lui s – pentru a fi mai clar, să spunem „situaţii care ar putea apărea fără încălcarea legilor fizicii“. Astfel, dacă s este situaţia în care mă aflu în prezent (fiind în Australia), prezența mea la Londra într-o săptămână este o situaţie posibilă, în vreme ce prezența mea pe Alpha Centauri (la peste patru ani-lumină distanță) nu este astfel. Urmându-l pe filosoful şi logicianul german din secolul al XVII-lea Leibniz, logicienii numesc adesea aceste situaţii posibile, cu o expresie pitorească, lumi posibile. Acum, a spune că ◊a (este posibil cazul în care a) este adevărat în s înseamnă doar să spunem că a este de fapt adevărat în cel puțin una dintre lumile posibile asociate cu s. Şi a spune că ¨a (este necesar cazul ca a) este adevărat în s înseamnă să spui că a este adevărat în toate lumile posibile asociate cu s. Iată de ce ¨ şi ◊ nu sunt funcţii de adevăr. Propoziţiile a şi b ar putea avea aceeaşi valoare de adevăr în s, să spunem F, dar ar putea avea valori de adevăr diferite în lumile asociate cu s. De exemplu, a ar putea fi adevărată într-una din ele (să spunem s’), dar b s-ar putea să nu fie adevărată în nici una, astfel:

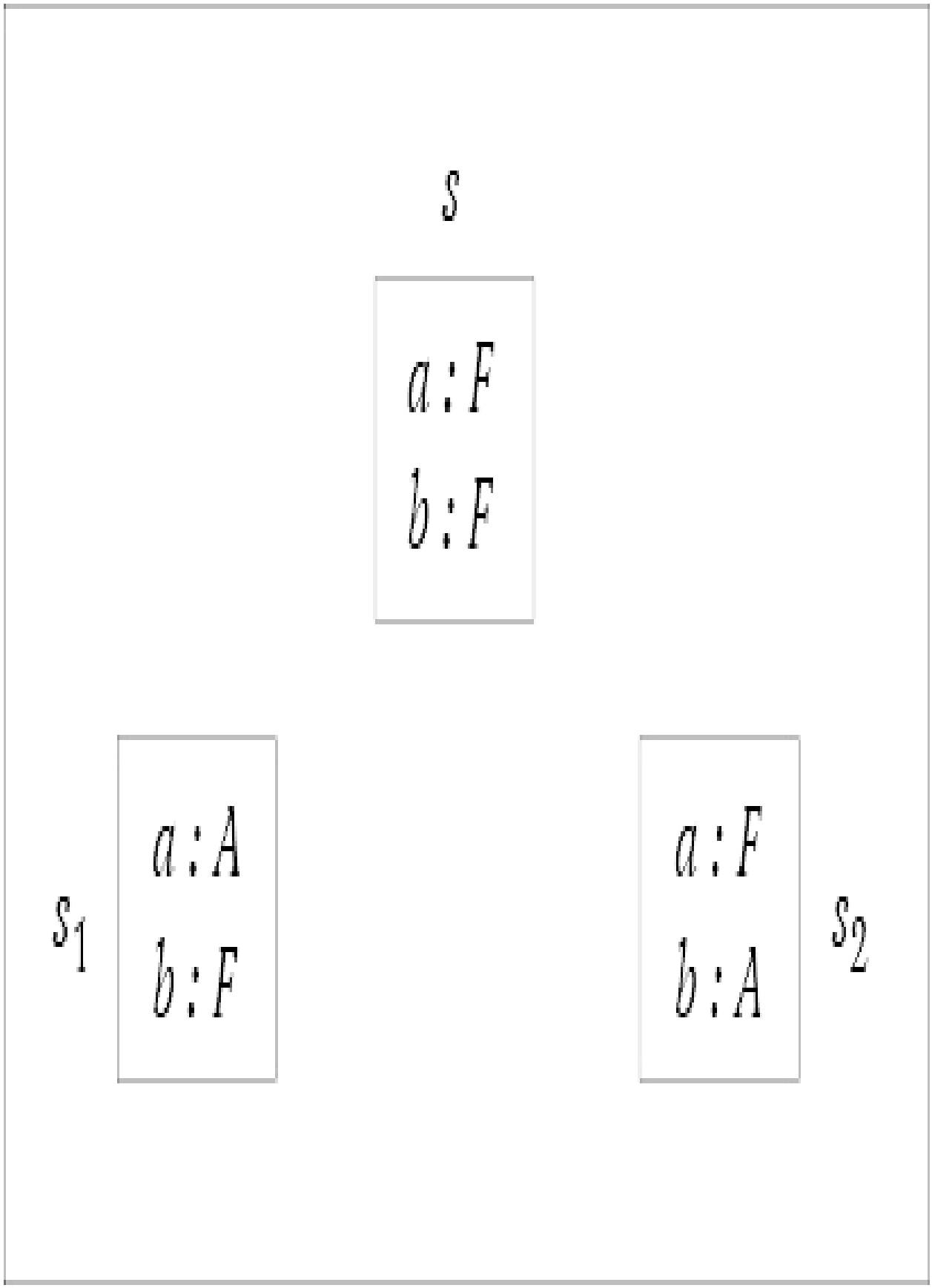

s
a : F
b : F
s'
a : A
b : F

Această relaţie ne oferă o modalitate de a analiza inferenţele care folosesc operatori modali. De exemplu să luăm în considerare inferența:

$$\Diamond a \; \Diamond b$$

$$\Diamond (a \; \& \; b)$$

Aceasta este nevalidă. Pentru a înțelege de ce, să presupunem că situaţiile asociate cu s sunt s1 şi s2, iar valorile de adevăr sunt după cum urmează:


s
a : F
b : F
s1
a : A
b : F
a : F
b : A
s2

a este A la s1; ca atare, ◊a este adevărat în s. Similar, b este adevărat în s2; ca atare, ◊b este adevărat în s. Dar a & b nu este adevărat în nici una dintre lumile asociate; ca atare, ◊(a & b) nu este adevărat în s.

Prin contrast, următoarea inferență este validă:

¨a ¨b

¨(a & b)

Dacă premisele sunt adevărate într-o situație s, atunci a și b sunt adevărate în toate lumile asociate cu s. Dar atunci a & b este adevărată în toate aceste lumi. Adică ¨(a & b) este adevărată în s.

Înainte de a reveni la întrebarea cum influențează toate acestea argumentul lui Aristotel, trebuie să discutăm pe scurt despre un alt operator logic pe care încă nu l-am întâlnit. Să scriem „dacă a atunci b“ ca a → b. Propoziții de această formă sunt numite condiționale și ne vom ocupa mai mult de ele în capitolul 7. Tot ce trebuie să remarcăm deocamdată este că inferența majoră în care condiționalele par să fie implicate este aceasta:

a a → b

b

(De exemplu – „Dacă ea face sport cu regularitate, atunci este în formă. Ea face

sport cu regularitate, prin urmare este în formă.“) Logicienii moderni dau de obicei acestei inferențe denumirea oferită de logicienii medievali: modus ponens. Literal, ea înseamnă „,modul care afirmă“. (Nu întreba de ce.)

În privința argumentului lui Aristotel, trebuie să ne gândim puțin la condiționale de forma:

dacă a atunci nu are cum să nu fie b.

Asemenea propoziții sunt, de fapt, ambigue. Unul dintre sensurile pe care le-ar putea avea ar fi că, dacă a este, de fapt, adevărat, atunci și b este în mod necesar adevărat. Adică, dacă a este adevărat în situația despre care vorbim, s, atunci b este adevărat în toate situațiile posibile asociate cu s. Putem scrie asta ca a $\rightarrow\neg$b. Propoziția este folosită astfel când spunem lucruri precum: „Nu poți schimba trecutul. Dacă un lucru este adevărat în trecut, el nu are cum să nu fie adevărat acum. Nu poți face nimic pentru a schimba asta: este ceva irevocabil“.

Al doilea sens al unei condiționale de forma: „dacă a atunci nu are cum să nu fie b“ este total diferit. Adesea folosim această succesiune de cuvinte pentru a exprima faptul că b derivă din a. Vom folosi asemenea propoziții când spunem ceva de genul: „Dacă Fred va divorța, el nu are cum să nu fie căsătorit“. Nu spunem că, dacă Fred va divorța, mariajul este irevocabil, ci doar că nu poți ajunge la divorț dacă nu ești căsătorit. Nu există situații posibile în care să ai una dintre condiții, dar să nu o ai și pe cealaltă. Adică, în orice situație posibilă, dacă una este adevărată, și cealaltă este adevărată. Adică $\neg(a \rightarrow b)$ este adevărată.

Acum, $a \rightarrow \neg b$ și $\neg(a \rightarrow b)$ au sensuri total diferite. Și cu siguranță prima nu decurge din a doua. Simplul fapt că $a \rightarrow b$ este adevărată în orice situație asociată cu s nu înseamnă că $a \rightarrow \neg b$ este adevărată în s; a ar putea fi adevărată în s, în vreme ce $\neg b$ ar putea să nu fie – atât b, cât și a nu ar avea cum să fie adevărate în unele

lumi asociate. Sau, pentru a oferi un contraexemplu concret: este necesarmente adevărat că, dacă John divorţează, el este căsătorit; dar este sigur neadevărat că, dacă John divorţează, el este necesarmente (irevocabil) căsătorit.

Pentru a reveni, în sfârşit, la argumentul lui Aristotel, să luăm în considerare propoziţia pe care am scris-o cu bold: „Dacă este adevărat să spun că voi fi implicat într-un accident, atunci nu se poate întâmpla altfel decât să fiu implicat într-un accident“. Aceasta este exact forma despre care am început să discutăm. Prin urmare, este ambiguă. Mai mult, argumentul profită de această ambiguitate. Dacă a este propoziţia: „Este adevărat să spun că voi fi implicat într-un accident rutier“ şi b este propoziţia: „Eu voi fi implicat (într-un accident rutier)“, atunci condiţionala scrisă cu bold este adevărată în sensul:

1. ¨(a→b)

În mod necesar, dacă este adevărat să spui ceva, atunci acel ceva este într-adevăr astfel. Dar ce trebuie stabilit este:

2. a→¨b

La urma urmelor, următorul pas al argumentului este tocmai de a deduce ¨b din a prin modus ponens. Dar, aşa cum am văzut, 2 nu derivă deloc din 1. Prin urmare, argumentul lui Aristotel este invalid. În plus, exact aceeaşi problemă apare în a doua parte a argumentului cu condiţionala: „Dacă este adevărat să spun că nu voi fi implicat într-un accident, atunci cu siguranţă nu are cum să nu se întâmple să nu fiu implicat într-un accident“.

Acesta pare un răspuns satisfăcător la argumentul lui Aristotel. Dar există un

argument strâns înrudit, la care nu se poate răspunde la fel de ușor. Să revenim la exemplul pe care l-am dat cu privire la schimbarea trecutului. Pare să fie adevărat că, dacă unele afirmații despre trecut sunt adevărate, ele sunt acum în mod necesar adevărate. Este imposibil să le considerăm false. Bătălia de la Hastings s-a dat în 1066 și acum nimeni nu mai poate face nimic ca ea să se fi dat în 1067. Astfel, dacă p este o afirmație despre trecut, $p \rightarrow \ddot{}p$.

Acum, să luăm în considerare unele afirmații despre viitor. Din nou, de exemplu, să pretindem că voi fi implicat într-un accident rutier mâine. Să presupunem că acest lucru este adevărat. Atunci, dacă cineva a făcut această afirmație acum 100 de ani, el a spus un adevăr. Și chiar dacă nimeni nu a rostit-o, dacă cineva ar fi făcut-o, ar fi spus un adevăr. Astfel, faptul că voi fi implicat într-un accident rutier mâine a fost adevărat acum 100 de ani. Această afirmație (p) este cu siguranță o afirmație despre trecut și astfel, de vreme ce este adevărată, este necesar adevărată ($\ddot{}p$). Așadar, trebuie să fie necesar adevărat că voi fi implicat într-un accident rutier mâine. Dar acesta a fost doar un exemplu; același raționament ar putea fi aplicat la orice altceva. Astfel, orice se întâmplă trebuie să se întâmple. Acest argument în sprijinul fatalismului nu comite aceeași eroare (adică nu folosește același argument invalid) ca primul pe care l-am dat. Așadar, în definitiv este fatalismul adevărat?

Ideile principale ale capitolului

- Fiecare situație vine însoțită de o colecție de posibile situații asociate.
- □*a* este adevărată într-o situație *s* dacă *a* este adevărată în toate situațiile asociate cu *s*.
- ◊*a* este adevărată într-o situație *s* dacă *a* este adevărată în unele dintre situațiile asociate cu *s*.

Capitolul 7. Operatori condiționali: ce se află într-un dacă?

În acest capitol vom reveni la operatorul logic pe care l-am prezentat în treacăt în capitolul 6, condiționala. Să ne reamintim că o condițională este o propoziție de tipul „dacă a atunci c“, pe care o scriem ca a → c. Logicienii numesc a antecedentul condiționalei și c consecventul condiționalei. De asemenea, am remarcat că una dintre cele mai fundamentale inferențe privind condiționala este modus ponens: a, a → c/c. Condiţionalele sunt fundamentale pentru o mare parte din raționamente. În capitolul 6 am prezentat doar un exemplu în acest sens. Totuși, condiționalele sunt foarte enigmatice. Ele au fost studiate în logică încă din cele mai vechi timpuri. De fapt, un comentator antic (Callimachus) istorisea că, la un moment dat, chiar și ciorile de pe acoperișuri croncăneau despre condiționale.

Hai să vedem de ce – sau cel puțin unul dintre motivele pentru care – condiționalele sunt enigmatice. Dacă știi că a → c, s-ar putea părea că poți deduce că ¬(a & ¬c) (nu este cazul ca a, și nu c). Să presupunem, de exemplu, că o persoană te informează că, dacă vei pierde autobuzul, vei întârzia. Poți deduce din asta că este fals că vei pierde autobuzul și nu vei întârzia. Ca atare, dacă știi că ¬(a & ¬c), s-ar putea părea că poți deduce a → c din aceasta. Să presupunem, de pildă, că o persoană îți spune că nu vei merge să vezi un film la cinematograf fără să cheltui bani (nu este cazul ca tu să mergi la cinematograf și să nu cheltui bani). Poți deduce că, dacă vei merge la cinematograf, vei cheltui bani.

¬(a & ¬c) este scris adesea ca a ⊃ c și numit condițională materială. Astfel, ar putea părea că a → c și a ⊃ c înseamnă cam același lucru. În particular, asumând mecanismul din capitolul 2, ele trebuie să aibă același tabel de adevăr. Este un exercițiu simplu, pe care îl voi scrie aici după cum urmează:

a c	a ⊃ c
A A A F F A F F	A F A A

Dar acest lucru este bizar. El înseamnă că, dacă c este adevărat într-o situaţie (primul şi al treilea rând), la fel de adevărat este şi a → c. Acest lucru cu greu ar putea părea corect. Este adevărat, de pildă, că Australia are capitala federală la Canberra, dar condiţionala „dacă Canberra nu este capitala federală a Australiei, atunci Canberra este capitala federală“ pare, de asemenea, absolut falsă. La fel, tabelul de adevăr arată că dacă a e fals (al treilea şi al patrulea rând), atunci a → c e adevărat. Dar nici acest lucru nu pare corect. Condiţionala: „Dacă Sidney este capitala federală a Australiei, atunci Brisbane este capitala federală“ pare şi ea absolut falsă. Ce a mers greşit?

Ce par să arate aceste exemple este că → nu este o funcţie de adevăr: valoarea de adevăr a lui a → c nu este determinată de valorile de adevăr ale lui a şi c. Atât „Roma se află în Franţa“, cât şi „Beijing se află în Franţa“ sunt false; dar este adevărat că:

Dacă Italia este o parte din Franţa, Roma se află în Franţa.

Deşi este fals că:

Dacă Italia este o parte din Franţa, Beijing se află în Franţa.

Prin urmare, cum funcţionează condiţionalele?

Un răspuns poate fi dat folosind mecanismul lumilor posibile din capitolul 6. Să luăm în considerare ultimele două condiţionale. În orice situaţie posibilă în care Italia ar fi încorporată în Franţa, Roma s-ar afla, într-adevăr, în Franţa. Dar există

situații posibile în care Italia a fost încorporată în Franța, dar aceasta n-a avut nici un efect asupra Chinei. Așadar, Beijing tot nu a fost în Franța. Aceasta sugerează că și condiționala a → c este adevărată în unele situații, s, doar dacă c este adevărată în fiecare dintre situațiile posibile asociate cu s în care a este adevărată; și este falsă în s dacă c este falsă în unele situații posibile asociate cu s în care a este adevărată.

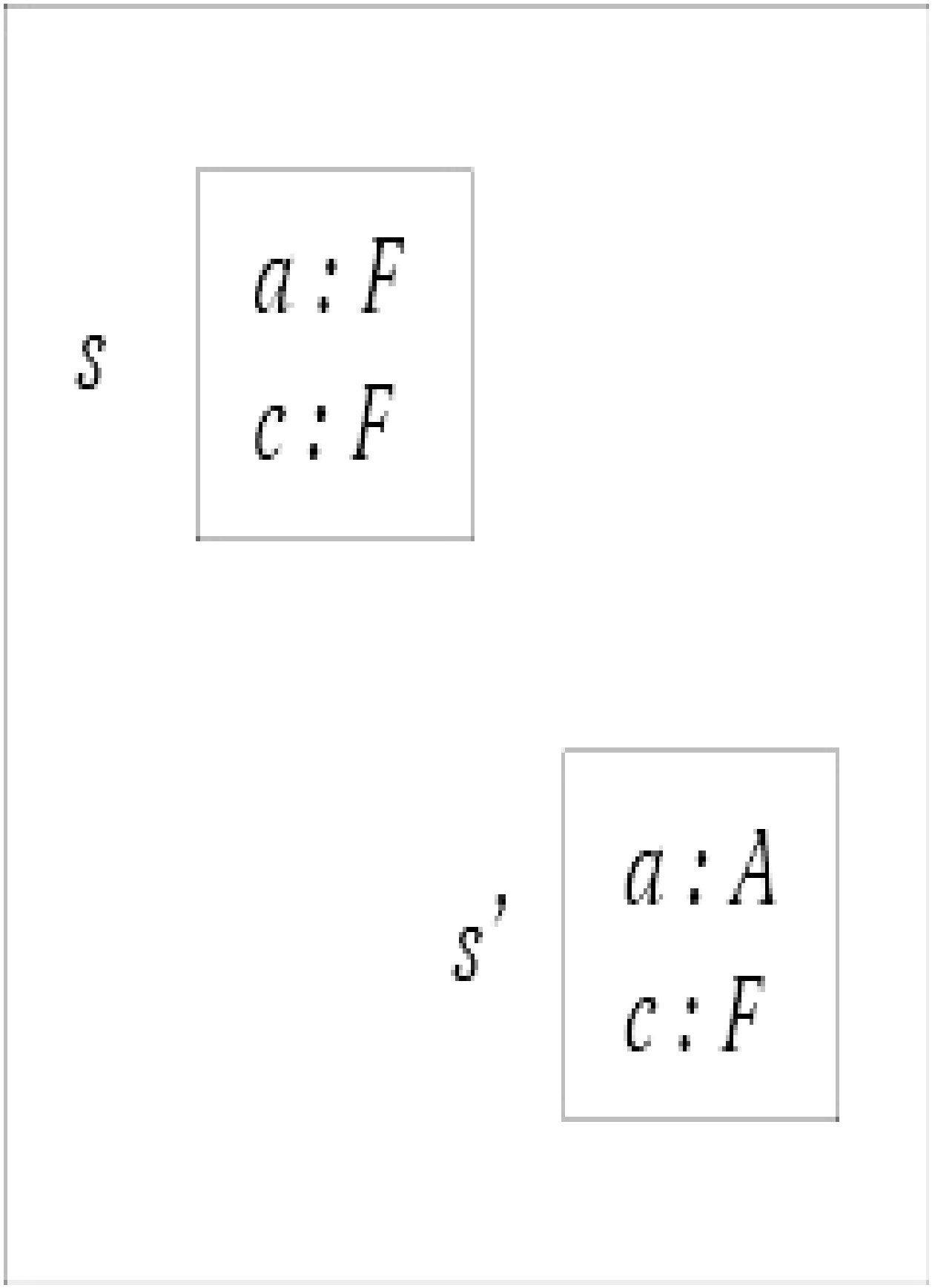
Aceasta oferă o explicație plauzibilă a lui →. De exemplu, demonstrează de ce modus ponens este valid – cel puțin într-o presupoziție. Presupoziția este că o considerăm pe s însăși drept una dintre situațiile posibile asociate cu s. Acest lucru pare rezonabil; orice se întâmplă de fapt în s este cu siguranță posibil. Acum, să presupunem că a și a → c sunt adevărate într-o situație, s. Atunci c este adevărată în toate situațiile asociate cu s în care a este adevărată. Dar s este una dintre aceste situații, iar a este adevărată în ea. Prin urmare, la fel și c, după cum este necesar.

Revenind la argumentul cu care am început, putem înțelege acum de ce eșuează. Inferența de care argumentul depinde este:

¬(a & ¬c)

$a \rightarrow c$

Și aceasta nu este validă. De exemplu, dacă a este F într-o situație, s, acest lucru este suficient pentru a face premisa adevărată în s. Dar aceasta nu ne spune nimic despre cum se comportă a și c în situații posibile asociate cu s. S-ar putea foarte bine ca într-una dintre acestea, să spunem s’, a să fie adevărată, dar c să nu fie adevărată, ca aici:


s
a : F
c : F
s'
a : A
c : F

Aşadar, a → c nu este adevărată în s.

Dar cum rămâne cu exemplul pe care l-am dat mai devreme, unde ai fost informat că nu vei putea merge la cinematograf fără să cheltui bani? Oare inferența n-a părut validă în acest caz? Să presupunem că ştii că nu vei putea merge la cinematograf fără să cheltui bani: ¬(m & ¬b). Eşti într-adevăr îndreptățit să tragi concluzia că, dacă mergi la cinematograf, vei cheltui bani: m → b? Nu neapărat. Să presupunem că nu mergi la cinematograf, indiferent ce se întâmplă, chiar dacă intrarea este liberă în seara asta. (Ai aflat că la televizor se difuzează un program mult mai interesant.) Atunci ştii că nu este adevărat că vei merge (¬m), şi astfel nu este adevărat că vei merge şi vei cheltui bani: ¬(m & ¬b). Eşti îndreptățit atunci să deduci că, dacă vei merge, vei cheltui bani?
Cu siguranță, nu: intrarea ar putea fi liberă.

Este important să remarcăm că în genul de situație unde afli că premisele sunt adevărate fiindcă ai fost informat în privința lor, operează de obicei şi alți factori. Când cineva îți spune ceva de tipul ¬(m & ¬b), el nu face asta în mod normal pe baza faptului că ştie că ¬m este adevărat. (Dacă ar şti asta, n-ar mai avea rost să te mai informeze prea mult despre situație.) Dacă îți spune asta este pe baza faptului că există o conexiune între m şi b: că nu poți avea m adevărată fără ca b să fie adevărată – şi tocmai de aceasta are nevoie o condițională pentru a fi adevărată. Aşadar, în cazul în care eşti informat despre presmise, ar fi în mod normal rațional să deduci m → b; dar nu din conținutul a ce s-a spus, ci mai curând din faptul că a fost spus.

De fapt, adesea facem inferențe corecte de acest gen fără să ne gândim. Să presupunem, de pildă, că întreb o persoană cum aş putea să realizez o operațiune sau alta cu ajutorul computerului meu, iar ea îmi răspunde: „Există un manual pe raft“. Eu deduc de aici că este un manual de computer. Acest lucru nu rezultă direct din ceea ce persoana mi-a spus, dar remarca nu ar fi fost relevantă dacă manualul nu ar fi fost unul referitor la utilizarea computerului, şi de obicei

oamenii sunt relevanți în ce spun. Ca atare, pot trage concluzia că este un manual de computer din faptul că persoana mi-a spus ce a făcut. Inferența nu este validă deductiv. În definitiv, persoana ar fi putut spune asta și fără ca manualul să fie neapărat unul despre computer (figura 7). Dar inferența este totuși o excelentă inferență inductivă. Ea face parte din genul celor numite de obicei implicatură conversațională.

Relațiile condiționale pe care tocmai le-am examinat par să dea rezultate – cel puțin până la nivelul la care am realizat examinarea. Dar și aici întâmpinăm o serie de probleme. Iată una dintre ele. Să luăm în considerare următoarele inferențe:

Dacă mergi la Roma, te vei afla în Italia.

Dacă ești în Italia, te afli în Europa.

Prin urmare, dacă mergi la Roma, te vei afla în Italia.

Dacă x este mai mare decât 10, atunci x este mai mare decât 5.

Prin urmare, dacă x este mai mare decât 10 și mai mic decât 100, atunci x este mai mare decât 5.

7. Când tragi concluzii pripite

© John Taylor

Aceste inferenţe par perfect valide şi chiar sunt, pe baza relaţiei prezente. Putem scrie prima inferenţă ca:

1. a → b b → c

a → c

Pentru a vedea că aceasta se dovedeşte validă, să presupunem că premisele sunt adevărate într-o situaţie s. Atunci b este adevărată în orice situaţie posibilă asociată cu s, unde a este adevărată; şi, de asemenea, c este adevărată în fiecare situaţie asociată unde b este adevărată. Prin urmare, c este adevărată în fiecare asemenea situaţie unde a este adevărată. Adică a → c este adevărată în s.

Putem scrie a doua inferenţă ca:

2. a → c

(a & b) → c

Pentru a vedea dacă aceasta se dovedeşte validă, să presupunem că premisa este adevărată într-o situaţie s. Atunci c este adevărată în orice situaţie posibilă asociată cu s, unde a este adevărată. Acum, să presupunem că a & b este adevărată într-o situaţie asociată; atunci c este cu siguranţă adevărată în acea situaţie, iar de aici rezultă că şi c este adevărată. Ca atare, (a & b) → c este adevărată în s.

Până acum, totul este în regulă. Problema este că există inferențe care au exact această formă, dar care par să fie nevalide. De exemplu, să presupunem că are loc alegerea prim-ministrului cu doar doi candidați, Smith, actualul premier, și Jones. Acum să luăm în considerare următoarea inferență:

Dacă Smith moare înainte de alegeri, Jones va câștiga. Dacă Jones câștigă alegerile, Smith se va retrage și va ieși la pensie. Prin urmare, dacă Smith moare înainte de alegeri, se va retrage și va ieși la pensie.

Aceasta este exact o inferență de forma 1. Dar pare evident că ar putea exista o situație în care ambele premise sunt adevărate. Însă nu și concluzia este - adevărată – asta dacă nu luăm în considerare o situație bizară, în care guvernul poate plăti pensiile și pe lumea cealaltă!

Sau să luăm în considerare următoarea inferență referitoare la mai sus menționatul Smith:

Dacă Smith sare din vârful unui munte înalt, va muri în urma căderii. Prin urmare, dacă Smith sare de pe vârful unui munte înalt și are o paraşută, el va muri de pe urma căderii.

Aceasta este o inferență de forma 2. Dar și aici ar putea părea clar că pot exista situații în care premisele sunt adevărate, dar concluzia nu este adevărată.

Ce am putea spune despre această stare de lucruri? Te voi lăsa să reflectezi la asta. În ciuda faptului că și condiționalele sunt esențiale pentru felul cum raționăm despre majoritatea lucrurilor, ele sunt totuși una dintre zonele controversate ale logicii. Dacă păsările nu mai croncăne în privința

condiționalelor, cu siguranță logicienii o fac.

Ideile principale ale capitolului

- $a \rightarrow b$ este adevărată într-o situație s doar dacă b este adevărată în orice situație asociată cu s unde a este adevărată.

Capitolul 8. Viitorul și trecutul: este timpul real?

Timpul este ceva cu care suntem familiarizaţi cu toţii. Plănuim să facem lucruri în viitor, ne amintim lucruri din trecut şi uneori savurăm, pur şi simplu, momente din prezent. Iar o parte din descoperirea drumului nostru prin timp o constituie realizarea de inferenţe privind timpul. De exemplu, următoarele două inferenţe sunt valide intuitiv:

Plouă.

Trebuie să fi plouat.

Este adevărat că a plouat întotdeauna.

Plouă.

Toate acestea par elementare.

Dar, de îndată ce începem să cugetăm la timp, se pare că ne încurcăm în noduri. Aşa cum spunea Sfântul Augustin, dacă nimeni nu mă întreabă ce este timpul, atunci ştiu foarte bine; dar când cineva mă întreabă, încetez să mai ştiu. Prezentul pare să fie în permanentă mişcare: mai întâi este astăzi, apoi este mâine şi aşa mai departe. Dar cum se poate schimba timpul? Timpul este ceea ce măsoară ritmul cu care orice altceva se schimbă. Această problemă stă la baza câtorva enigme privind timpul. Una dintre ele a fost propusă la începutul - secolului XX de filosoful britanic John McTaggart Ellis McTaggart (da, ai citit bine). Ca mulţi alţi filosofi, McTaggart a fost tentat de viziunea că timpul este ireal – aşadar că, în ordinea supremă a lucrurilor, timpul este o iluzie.

Spre a explica argumentele lui McTaggart în acest sens, ne va fi de ajutor să apelăm la puțin simbolism. Să luăm așadar o propoziție la trecut, precum „Soarele a strălucit“. Putem exprima această propoziție sub o formă echivalentă, chiar dacă puțin bizară: „S-a întâmplat ca soarele să strălucească“. Să scriem „S-a întâmplat ca“ drept T (pentru „trecut“). Așadar, putem scrie această propoziție astfel: „ T soarele să strălucească“. Sau, notând cu s „soarele să strălucească“, mai simplu Ts. La fel, să luăm orice propoziție la timpul viitor, de pildă „Soarele va străluci“. (Strict vorbind, îți vor spune experții în gramatică, limba engleză nu are un timp viitor propriu-zis, ca franceza sau latina. Dar știi ce vreau să spun.) Putem scrie aceasta ca „Se va întâmpla ca soarele să strălucească“. Dacă scriem „Se va întâmpla ca“ drept V (pentru „viitor“), atunci putem scrie asta ca Vs.

T și V sunt operatori, ca ¨ și ◊, care se adaugă propozițiilor pentru a crea propoziții întregi. Mai mult, ca și ¨ și ◊, ele nu sunt funcții de adevăr. „Este ora 4 p.m.“ și „Este ora 4 p.m. a zilei de 2 august 1999“ sunt ambele adevărate (în momentul în care scriu); „Va fi ora 4 p.m.“ este, de asemenea, adevărată (în momentul prezent) – este ora 4 p.m. o dată pe zi, în fiecare zi – deși „Va fi ora 4 p.m., 2 august 1999“ nu este. Logicienii numesc T și V operatori temporali. Operatorii temporali pot fi iterați sau compuși. De pildă, putem spune: „Soarele va fi strălucit“, adică „Se va întâmpla că s-a întâmplat că soarele strălucește“: VTs. Sau putem spune: „Soarele strălucise“, adică „S-a întâmplat că s-a întâmplat că soarele strălucește“: TTs. (Operatorii modali cu care am făcut cunoștință în capitolul 7 pot fi, de asemenea, iterați în acest fel, deși nu vom discuta despre asta aici.) Nu toate iterațiile operatorilor temporali au formulări tocmai elegante. De pildă, nu există un mod mai bun de a exprima VTVs decât expresia mai degrabă stângace: „Se va întâmpla că s-a întâmplat că soarele va străluci“. Dar iterațiile au un sens gramatical perfect. Putem numi iterațiile lui T și V, ca VT, TT, VTV, timpuri compuse.

Acum, să revenim la McTaggart. Acesta a raționat că nu ar exista timp dacă nu ar exista trecut și viitor: acestea constituie esența timpului. Totuși, trecutul și viitorul, a argumentat el, sunt inerent contradictorii: așadar, nimic din realitate nu

le corespunde. Ei bine, s-ar putea. Dar de ce sunt trecutul şi viitorul contradictorii? Pentru început, trecutul şi viitorul sunt incompatibile. Dacă un eveniment instantaneu este trecut, el nu este viitor, şi invers. Fie e un eveniment instantaneu. El poate fi orice vrei să fie, dar să presupunem că este trecerea primului glonţ prin inima ţarului Nicolae, în timpul Revoluţiei Ruse. Fie h propoziţia „e se desfăşoară“. Atunci avem:

¬(Th & Vh)

Dar e, ca toate evenimentele, este trecut şi viitor. Deoarece timpul zboară, toate evenimentele au proprietatea de a fi viitoare (înainte de a se întâmpla) şi proprietatea de a fi trecute (după ce s-au întâmplat):

Th & Vh

Aşadar, avem o contradicţie.

Este puţin probabil ca acest argument să convingă pe cineva prea mult timp. Un eveniment nu poate fi trecut şi viitor în acelaşi timp. Momentul în care glonţul a străbătut inima ţarului a fost trecut şi viitor în momente diferite. El a început ca viitor, a devenit prezent într-o clipă dureroasă şi apoi a fost trecut. Dar acum – şi aici este partea îndrăzneaţă a argumentului lui McTaggart – ce spunem aici? Aplicăm timpurile compuse la h. Spunem că s-a întâmplat că evenimentul a fost viitor, TVh; apoi că s-a întâmplat că a fost trecut, TTh. Multe timpuri compuse, ca timpurile simple, sunt incompatibile. De exemplu, dacă vreun eveniment va fi viitor, nu se întâmplă că el a fost trecut:

¬(TTh & VVh)

Dar, la fel ca în cazul timpurilor simple, curgerea timpului este suficientă pentru a garanta că toate evenimentele au, de asemenea, toate timpurile compuse. În trecut, Vh; la fel în trecutul îndepărtat VVh. În viitor, Th; la fel în viitorul îndepărtat, TTh:

TTh & VVh

Și ne alegem iar cu o contradicție.

Cei care și-au păstrat perspicacitatea vor răspunde, la fel ca mai înainte, că h are timpurile sale compuse, în momente diferite. S-a întâmplat că VVh; apoi, mai târziu, s-a întâmplat că TTh. Dar ce spunem aici? Aplicăm timpurile mai complexe la h: TVVh și TTTh; și putem prezenta și în cazul acestora exact același argument. Aceste timpuri compuse nu sunt toate consistente între ele, dar curgerea timpului garantează că h le posedă pe toate. Am putea da aceeași replică din nou, dar, de asemenea, ea este deschisă aceleiași contrareplici. Ori de câte ori încercăm să ieșim din contradicție cu un set de timpuri, facem asta doar prin descrierea lucrurilor folosind alte timpuri care sunt la fel de contradictorii; așadar, nu vom scăpa niciodată de contradicții. Acesta este argumentul lui McTaggart.

Ce se poate spune despre asta? Pentru a răspunde, să examinăm validitatea inferențelor privitoare la timpuri. Pentru a explica acest lucru, să presupunem că fiecare situație s0 vine la pachet cu un mănunchi de alte situații – de astă dată nu situații care reprezintă posibilități asociate cu s0 (ca în cazul operatorilor modali), ci situații care sunt fie înainte de s0, fie după s0. Presupunând, așa cum facem în mod normal, că timpul este unidimensional și infinit în ambele direcții, trecut și viitor, putem reprezenta situațiile într-un mod familiar:

... s-3 s-2 s-1 s 0 s 1 s 2 s 3 ...

Stânga reprezintă evenimente anterioare, dreapta – evenimente de mai târziu. Ca de obicei, fiecare s oferă o valoare de adevăr, A sau F, pentru fiecare propoziție fără operatori temporali. Dar propozițiile cu operatori temporali? Ei bine, Ta este A în orice situație s doar dacă a este adevărată într-o situație de la stânga lui s; iar Va este adevărată în s doar dacă a este adevărată într-o situație de la dreapta lui s.

Câtă vreme facem toate aceste operații, putem adăuga doi noi operatori temporali, U și S. U poate fi citit ca „Urmează să se întâmple întotdeauna ca“ și Ua este adevărată în orice situație s doar dacă a este adevărată în toate situațiile de la dreapta lui s. S poate fi citit ca „S-a întâmplat întotdeauna ca“ și Sa este adevărată în orice situație s doar dacă a este adevărat în toate situațiile de la stânga lui s. (U și S le corespund lui V, respectiv lui T, exact așa cum ¨ îi corespunde lui ◊.)

Acest mecanism ne arată de ce cele două inferențe cu care am pornit la începutul capitolului sunt valide. Utilizând operatori temporali, aceste inferențe pot fi scrise, respectiv, ca:

r VUr

VTr r

Prima inferență este validă, deoarece dacă r este adevărată într-o situație s0, atunci în orice situație de la dreapta lui s0, să spunem s1, Tr este adevărată (deoarece s0 este la dreapta sa). Dar atunci VTr este adevărată în s0, deoarece s1 este la dreapta sa. Putem reprezenta lucrurile astfel:

... s-3 s-2 s-1 s0 s1 s2 s3 ...

r

Tr

VTr

A doua inferență este validă, deoarece dacă VSr este adevărată în s0, atunci într-o situație din dreapta lui s0, să spunem s2, Sr este adevărată. Dar atunci în toate situațiile din stânga lui s2, mai ales în s0, r este adevărată:

... s-3 s-2 s-1 s0 s1 s2 s3 ...

VSr

Sr

r r r r r

Mai mult, anumite combinații ale timpurilor sunt imposibile, după cum ne-am putea aștepta. Astfel, dacă h este o propoziție adevărată doar într-o situație, să zicem s0, atunci Th & Vh este falsă în fiecare s. Ambele conjuncții sunt false în s0; prima conjuncție este falsă la stânga s0; a doua este falsă la dreapta. La fel, de pildă, TTh & VVh este falsă în orice s. Te las să verifici detaliile.

Acum, ce legătură au toate acestea cu argumentul lui McTaggart? Concluzia argumentului lui McTaggart, dacă îți amintești, era că, deoarece h are toate timpurile posibile, nu este niciodată posibil să se evite contradicția. Rezolvarea contradicțiilor la un nivel de complexitate pentru timpurile compuse nu face

decât să creeze contradicţii la alt nivel. Relaţia operatorilor temporali pe care tocmai am prezentat-o ne demonstrează că acest lucru este fals. Să presupunem că h este adevărat doar în s0. Atunci orice afirmaţie cu un timp compus referitor la h este adevărată undeva. De pildă, să luăm în considerare VTTVh. Aceasta este adevărată în s-2, după cum indică diagrama următoare:

... s-3 s-2 s-1 s0 s1 s2 s3 ...

h

Vh

TVh

TTVh

VTTVh

În mod clar, putem proceda la fel pentru fiecare timp compus format din V şi T, mergând în zigzag la stânga sau la dreapta, după cum este necesar. Şi toată această situaţie are o coerenţă perfectă. Infinitudinea de situaţii diferite ne permite să atribuim h tuturor timpurilor sale compuse în poziţiile corespunzătoare, fără a încălca variatele incompatibilităţi dintre ele, de pildă având Vh şi Th adevărate în aceeaşi situaţie. Prin urmare, argumentul lui McTaggart nu se susţine.

Acesta este un rezultat fericit pentru cei care cred în realitatea timpului. Dar cei care sunt de acord cu McTaggart ar putea să nu fie totuşi convinşi de -consideraţiile noastre. Să presupunem că îţi dau un set de specificaţii pentru construirea unei case: uşa de la intrare vine aici, o fereastră vine aici... Cum poţi să ştii că toate aceste considerații sunt coerente? Cum poţi să ştii că, atunci când realizezi construcţia, totul va funcţiona şi nu vei fi nevoit, de pildă, să pui o uşă într-o poziţie incompatibilă? Un mod de a stabili acest lucru este să construieşti un model la scară, în conformitate cu toate specificaţiile. Dacă un

astfel de model poate fi construit, specificaţiile au coerenţă. Tocmai aceasta am făcut cu discuţia noastră despre timpuri. Modelul este secvenţa de situaţii, împreună cu modalitatea de atribuire de A şi F propoziţiilor la un anumit timp. Este ceva mai abstract decât modelul unei case, dar principiul este, în mare, acelaşi.

8. Oricum, pentru Dr. Who spațiul și timpul sunt cam același lucru.

© Photodynamx/Dreamstime

Totuşi, este posibil să se ridice obiecţii faţă de un anumit model. Uneori, un model va ignora aspecte importante. De exemplu, într-un model la scară al unei case, o grindă ar putea să nu se prăbuşească deoarece suportă mult mai puţină tensiune decât grinda corespunzătoare dintr-o construcţie la scară reală. Ar putea fi necesar ca grinda la scară reală să suporte o sarcină imposibilă, făcând imposibilă clădirea la scară reală – în ciuda aparentei funcţionalităţi a modelului. Similar, s-ar putea sugera că modelul nostru de timp ignoră aspecte importante. În definitiv, nu am oferit decât un model spaţial al timpului (stânga, dreapta etc). Însă spaţiul şi timpul sunt lucruri total diferite (figura 8). Spaţiul nu curge la fel cum o face timpul (orice ar putea însemna, de fapt, aceasta). Acum, tocmai curgerea timpului este cea care generează presupusa contradicţie evidenţiată de McTaggart. Nu-i de mirare că aceasta nu se reflectă în model! Aşadar ce anume lipseşte, mai precis, din model? Şi, de îndată ce am luat în calcul acest lucru, contradicţia reapare?

Ideile principale ale capitolului

- Fiecare situație decurge dintr-o mulțime asociată de situații anterioare și ulterioare.
- **V***a* este adevărată într-o situație dacă *a* este adevărată într-o situație ulterioară.
- **T***a* este adevărată într-o situație dacă *a* este adevărată într-o situație anterioară.
- **U***a* este adevărată într-o situație dacă *a* este adevărată în fiecare situație ulterioară.
- **S***a* este adevărată într-o situație dacă *a* este adevărată în fiecare situație anterioară.

Capitolul 9. Identitate și schimbare: totul este întotdeauna la fel?

Încă nu am terminat discuția despre timp. Timpul este implicat și în diferite alte enigme, de genul cărora ne vom ocupa în acest capitol. Acest gen privește probleme apărute când lucrurile se schimbă; și mai ales întrebări legate de ce poate fi spus despre identitatea obiectelor care se schimbă în timp.

Iată un exemplu. Cu toții credem că obiectele pot supraviețui schimbărilor. De pildă, când vopsesc un dulap, deși culoarea acestuia se poate schimba, el este totuși același dulap. Sau când îți schimbi coafura sau ai ghinionul de a ți se amputa un membru, ești tot tu. Dar cum poate supraviețui ceva schimbării? În definitiv, când îți schimbi coafura, pari o persoană diferită, nicidecum aceeași. Și dacă persoana este diferită, ea este o persoană diferită; așadar, vechiul tu și-a încheiat existența. Exact în același mod, s-ar putea susține, nici un obiect nu rezistă trecerii printr-o schimbare, pentru că orice schimbare înseamnă că vechiul obiect dispare și este înlocuit de un cu totul altul.

Asemenea argumente apar în diferite momente ale istoriei filosofiei, dar astăzi majoritatea logicienilor sunt de acord că ele sunt greșite și se bazează doar pe simple ambiguități. Trebuie să facem diferența între un obiect și proprietățile sale. Când spunem că tu, cu o coafură diferită, ești diferit, spunem de fapt că ai proprietăți. Nu înseamnă că ești efectiv o persoană diferită, în felul în care eu sunt o persoană diferită de tine.

Un motiv pentru care cineva n-ar reuși să facă distincția între un anumit obiect și a avea anumite proprietăți este că verbul „a fi“ și diferitele sale forme gramaticale – „este“, „sunt“ și așa mai departe – poate fi folosit pentru a exprima ambele lucruri. (Și aceasta e valabil și pentru cuvinte similare din alte limbi.)

Dacă spunem „Masa este roșie“, „Părul tău este scurt“ și alte lucruri similare, atribuim o proprietate unui obiect. Dar când cineva spune „Eu sunt Graham Priest“, „Persoana care a câștigat cursa este aceeași persoană care a câștigat-o și anul trecut“ și așa mai departe, atunci aceste construcții identifică un obiect într-un anume fel, adică îi afirmă identitatea.

Logicienii numesc prima utilizare a lui „este“ de predicație și cea de-a doua utilizare de identitate. Și deoarece acestea au proprietăți oarecum diferite, ei le descriu în moduri diferite. Cu forma „este“ de predicație am făcut cunoștință în capitolul 3. „John este roșu“ se scrie de obicei sub forma jR, așadar „este“ devine încorporat în predicat. (De fapt, după cum am remarcat în capitolul 3, este mult mai frecvent să scrii astfel decât invers, ca Rj.) „Este“ de identitate se scrie cu =, semn familiar de la aritmetica din școală. Astfel, „John este persoana care a câștigat cursa“ se scrie: j = c. (Notația c este aici o descriere, dar aceasta nu are nici o semnificație în chestiunea de față.) Asemenea propoziții se numesc identități.

Ce proprietăți are identitatea? Mai întâi, este o relație. O relație este ceva care leagă două obiecte. De exemplu, vederea este o relație. Dacă spunem „John o vede pe Mary“ stabilim o relație între ei. Obiectele legate printr-o relație nu trebuie să fie neapărat diferite. Dacă spunem „John se vede pe el însuși“ (poate într-o oglindă), stabilim o relație pe care John o are cu John. Identitatea este o relație foarte specială. Ea este o relație pe care fiecare obiect o are cu el însuși și cu nimic altceva.

Ai putea crede că acest lucru ar face identitatea o relație mai degrabă inutilă, dar de fapt nu este așa. De exemplu, dacă spun: „John este persoana care a câștigat cursa“, spun că relația de identitate are loc între obiectul desemnat prin „John“ și obiectul desemnat de „persoana care a câștigat cursa“ – cu alte cuvinte, aceste două nume se referă la una și aceeași persoană. Aceasta poate reprezenta o informație extrem de semnificativă.

Însă cele mai importante lucruri legate de identitate sunt inferențele în care este implicată. Iată un exemplu:

John este persoana care a câștigat cursa.

Persoana care a câștigat cursa a obținut un premiu.

Prin urmare, John a obținut un premiu.

Putem scrie asta astfel:

$$j = c\ cP$$

$$jP$$

Această inferență este validă în virtutea faptului că, pentru orice obiecte, x și y, dacă x = y, atunci x are toate proprietățile pe care le are y și invers. Unul și același obiect fie are proprietățile respective, fie nu le are. Aceasta este numită de obicei Legea lui Leibniz, după filosoful Leibniz (figura 9), cu care am făcut cunoștință în capitolul 6. Într-o aplicare a Legii lui Leibniz, o premisă este o afirmație de identitate, să spunem m = n; a doua premisă este o propoziție conținând unul dintre numele care flanchează semnul de identitate, să spunem m; iar concluzia este obținută înlocuind m cu n.

Legea lui Leibniz este extrem de importantă și are multe aplicații mai degrabă neproblematice. De exemplu, algebra de liceu ne asigură că $(x + y)(x–y) = x^2 – y^2$. Prin urmare, dacă rezolvi o problemă și stabilești că, să spunem, $x^2 – y^2 = 0$, poți aplica Legea lui Leibniz pentru a deduce că $(x + y)(x–y) = 0$. Simplitatea ei înșelătoare ascunde însă o multitudine de probleme. În particular, par să existe multe contraexemple la aceasta. Să luăm, de pildă, următoarea inferență:

John este persoana care a câștigat cursa.

Mary știe că persoana care a câștigat cursa a obținut un premiu.

Prin urmare, Mary știe că John a obținut un premiu.

9. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1616), ultimul logician notabil de dinaintea perioadei moderne

© Science Museum/Science & Society Picture Library.
Toate drepturile rezervate

Aceasta pare o aplicare a Legii lui Leibniz, de vreme ce concluzia este obținută înlocuind „John“ cu „persoana care a câștigat cursa“ în a doua premisă. Dar este clar că premisele ar fi putut fi la fel de adevărate fără ca și concluzia să fie adevărată: poate că Mary nu știe că John este persoana care a câștigat cursa. Este aceasta o încălcare a Legii lui Leibniz? Nu neapărat. Legea spune că, dacă x = y, atunci orice proprietate a lui x este și o proprietate a lui y. Dar concluzia „Mary știe că x a obținut un premiu“ exprimă o proprietate a lui x? Nu chiar: mai curând ar părea să exprime o proprietate a lui Mary. Dacă Mary și-ar înceta brusc existența, acest lucru nu ar schimba cu nimic x! (Logica unor expresii ca „știe că“ este încă disputată în logică.)

Un alt tip de problemă ar fi următorul. Se dă un drum; este o șosea asfaltată, să o numim ș. Și se mai dă un drum: este un drum de pământ bătătorit, să-l numim d. Cele două drumuri sunt însă același drum ș = d, doar că asfaltul nu a mai ajuns să acopere și capătul drumului. Așadar, Legea lui Leibniz ne spune că ș este un drum de pământ, iar d este o șosea asfaltată – ceea ce nu sunt. Dar unde e greșeala, în acest caz? Nu putem spune că a fi de pământ sau a fi din asfalt nu constituie proprietăți reale ale drumului. Cu siguranță sunt. Dar s-a greșit la următorul aspect: nu am dovedit suficientă precizie când am specificat proprietățile. Proprietățile relevante sunt drum asfaltat de aici până acolo și drum de pământ de acolo până dincolo. Cum ș și d sunt același drum, ele au ambele proprietăți și astfel nu avem vreo încălcare a Legii lui Leibniz.

Toate bune și frumoase. Aceste probleme sunt relativ simple. Dar să analizăm una care nu mai este atât de simplă. Și iată că aducem iarăși în discuție timpul. Pentru a explica problema, va fi util să revenim la operatorii temporali din capitolul 8 și mai ales la U („urmează întotdeauna să se întâmple“). Fie x orice dorești – un copac, o persoană etc. – și să considerăm afirmația x = x. Conform acesteia, x are proprietatea de a fi identic cu x – ceea ce este, evident, adevărat: este parte a însuși sensului identității. Și aceasta este astfel, indiferent de timp. Este adevărată acum, adevărată în toate timpurile viitoare și adevărată în toate timpurile trecute. În particular, așadar, U x = x este adevărată. Iată o situație în care se aplică Legea lui Leibniz:

$$x = y \; U \; x = x$$

U x = y

(Nu te lăsa indus în eroare de faptul că am înlocuit cu y una dintre ocurențele lui x în a doua premisă. Asemenea aplicări ale Legii lui Leibniz au sens. Consideră afirmațiile: „John este persoana care a câștigat cursa; John îl vede pe John; așadar John o vede pe persoana care a câștigat cursa.“) Inferența ne arată că, dacă x este identic cu y și x are proprietatea de a fi identic cu x în toate timpurile viitoare, aceeași proprietate o are și y. Și deoarece a doua premisă este adevărată, așa cum tocmai am remarcat, rezultă că, dacă două lucruri sunt identice, ele vor fi întotdeauna identice.

Și ce însemnătate are acest lucru? Pur și simplu el nu pare să fie întotdeauna adevărat. De exemplu, să luăm în considerare o amibă. Amibele sunt creaturi acvatice unicelulare care se înmulțesc prin diviziune: o amibă se va divide exact la mijloc, transformându-se în două amibe. Acum, să luăm o amibă, A, care se divide pentru a deveni două amibe, B și C. Înainte de diviziune, atât B, cât și C erau A. Așadar, înainte de diviziune, B = C. După diviziune însă, B și C sunt amibe distincte, ¬B = C. Așadar, dacă două lucruri sunt aceleași, de aici nu decurge neapărat că vor rămâne întotdeauna aceleași.

Nu putem rezolva această problemă în același fel în care le-am rezolvat pe cele precedente. Proprietatea de a fi identic cu x în toate timpurile viitoare este cu siguranță o proprietate a lui x. Și nu pare să fie cazul ca proprietatea să fie insuficient de detaliată. Pare să nu existe nici o modalitate de a o face mai precisă, pentru evitarea problemei.

Ce altceva am mai putea spune? Un gând firesc ar fi acesta. Înainte de diviziune, B nu era A: era doar o parte din A. Dar B este o amibă, iar A este o ființă

unicelulară: nu există părți în amibă. Așadar, B nu poate fi o parte din A.

Mai radical, am putea sugera că B și C nu existau în realitate înainte de diviziune, astfel încât ele au apărut după aceea. Dacă ele nu existau înainte de diviziune, ele nu erau A înainte de aceasta. Prin urmare, nu este cazul ca B = C înainte de diviziune. Dar și acest lucru pare greșit. B nu este o nouă amibă; este pur și simplu A, deși unele dintre proprietățile sale s-au schimbat. Dacă acest lucru nu e limpede, imaginează-ți că C trebuie să moară la diviziune. În acest caz, nu am avea nici o ezitare să spunem că B este A. (Ar fi ca un șarpe care năpârlește.) Acum, identitatea unui lucru nu poate fi afectată, indiferent ce alte lucruri sunt în jurul lui. Așadar, A este B. De asemenea, A este C.

Desigur, s-ar putea insista că doar fiindcă A dobândește noi proprietăți, el este, strict vorbind, un nou obiect, nu doar un obiect vechi cu proprietăți noi. Prin urmare, B nu este chiar A. La fel și în cazul lui C. Dar acum revenim la problema cu care am început capitolul.

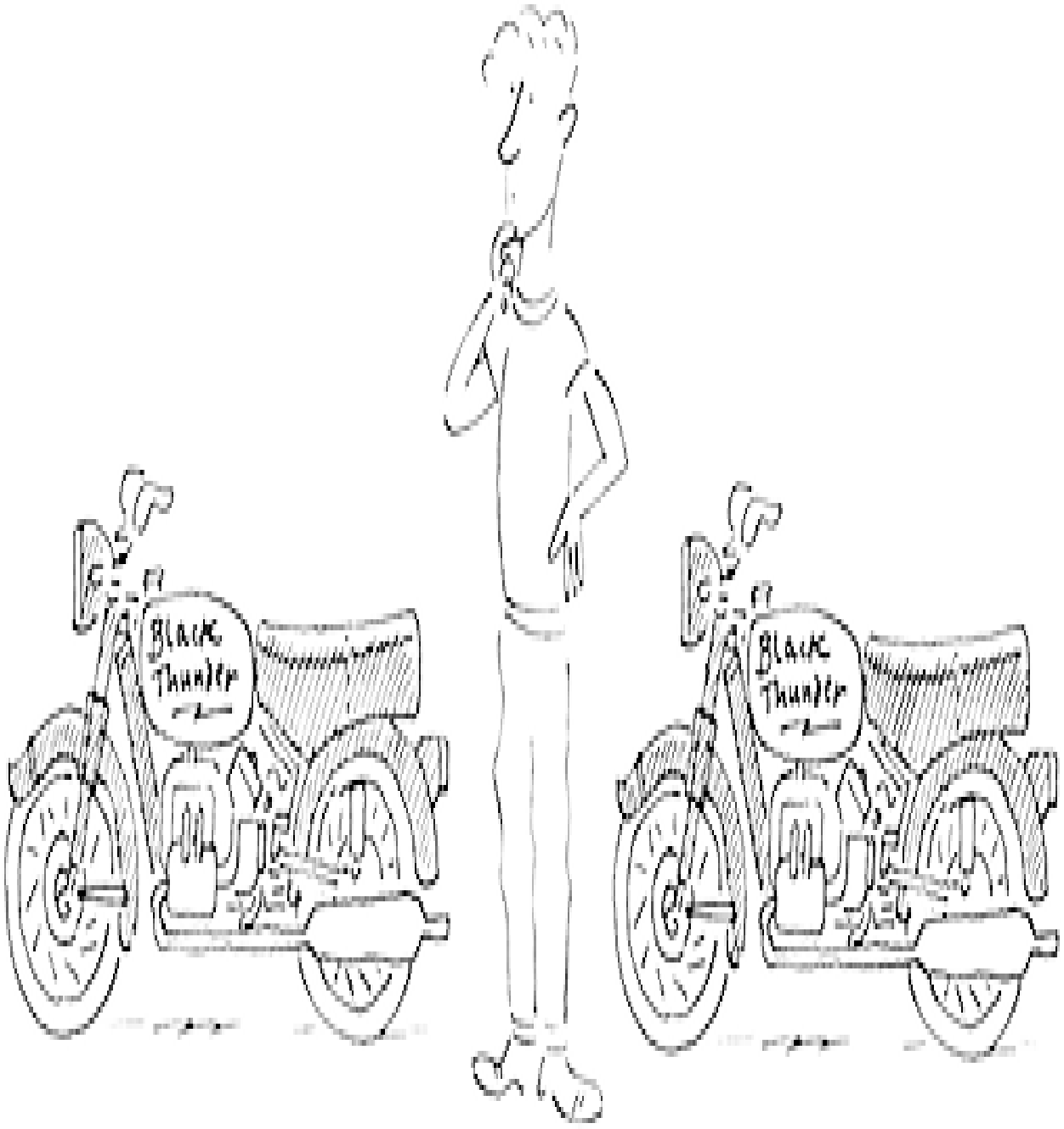
Ideile principale ale capitolului

- *m* = *n* este adevărat dacă numele *m* și *n* se referă la același obiect.
- Dacă două obiecte sunt aceleași, orice proprietate a unuia este și o proprietate a celuilalt (Legea lui Leibniz).

Capitolul 10. Vaguitate: cum oprești căderea pe o pantă alunecoasă?

Fiindcă tot am ajuns la subiectul identității, iată o altă problemă legată de aceasta. Totul se uzează în timp. Uneori, părțile sunt înlocuite. Motocicletele și mașinile primesc ambreiaje noi; casele primesc acoperișuri noi; și chiar și celulele individuale din corpul uman sunt înlocuite în timp. Asemenea schimbări nu afectează însă identitatea obiectului respectiv. Când înlocuiesc ambreiajul motocicletei, ea rămâne aceeaşi motocicletă. Să presupunem că, în decurs de câțiva ani, înlocuiesc fiecare piesă a motocicletei Black Thunder. Fiind un om chibzuit și grijuliu, păstrez piesele vechi. Când toate au fost înlocuite, le asamblez la loc pentru a recrea motocicleta originală. Dar am început cu o motocicletă Black Thunder, iar faptul de a schimba o piesă din ea nu îi afectează identitatea: este aceeaşi motocicletă. Aşadar, la fiecare înlocuire vehiculul este tot o motocicletă Black Thunder, până când, la sfârşit, este ea – Black Thunder. Dar ştim că acest lucru nu poate fi corect. Motocicleta Black Thunder stă acum lângă ea în garaj (figura 10).

Iată un alt exemplu al aceleiaşi probleme. O persoană care are cinci ani este (biologic) un copil. Dacă cineva este un copil, el va fi copil și o secundă mai târziu.



10. Dilema motociclistului

© John Taylor

În acest caz este tot copil și o secundă după aceea, și încă o secundă după aceea, și încă o secundă... Așadar, după 630 730 000 de secunde, el este încă un copil. Dar atunci are deja 25 de ani!

Asemenea argumente sunt renumite pentru faptul de a fi fost inventate de Eubulide, același filosof care a inventat paradoxul mincinosului din capitolul 5. Astăzi, ele se numesc paradoxuri ale soriților. (O formă standard a argumentului susține că, adăugând câte un fir de nisip o dată, nu poți forma niciodată o grămadă; „soriți“ provine de la termenul grecesc sorós, care înseamnă „grămadă“.) Acestea sunt unele dintre cele mai contrariante paradoxuri din logică. Ele apar când predicatul implicat („este o motocicletă Black Thunder“, „este un copil“) este vag într-un anumit sens, adică aplicabilitatea sa este variabilă, tolerând schimbări foarte mici: dacă se aplică unui obiect, atunci o schimbare foarte mică la nivelul obiectului nu va altera acest fapt. Practic toate predicatele pe care le angajăm în discursul cotidian sunt vagi din acest punct de vedere: „este roșu“, „este treaz“, „este fericit“, „este beat“ – chiar și „este mort“ (să mori necesită timp). Astfel, argumentele alunecoase de tipul soriților sunt potențial endemice în raționamentul nostru.

Pentru a ne concentra asupra acestei chestiuni, să examinăm în detaliu unul dintre argumentele prezentate. Să spunem că Jack este copilul de cinci ani. Fie a0 propoziția „Jack este copil după 0 secunde“. Fie a1 propoziția „Jack este copil după 1 secundă“ și așa mai departe. Dacă n este orice număr, an este propoziția „Jack este copil după n secunde“. Fie k un număr enorm, cel puțin la fel de mare ca 630 720 000. Știm că a0 este adevărat. (După ce au trecut 0 secunde, Jack are tot cinci ani.) Și pentru fiecare număr, n, știm că an → an+1. (Dacă Jack este copil în orice moment, el este tot copil și o secundă mai târziu.) Putem înlănțui toate premisele printr-o succesiune de deducții modus ponens, astfel:

a0 a → a1

a1 a1 → a2

a2

...

ak-1 ak-1 → ak

ak

Concluzia finală este ak, despre care știm că nu este adevărată. Ceva a mers greșit și se pare că nu avem o marjă de manevră prea mare.

Așadar, ce putem spune? Iată un răspuns, numit uneori logică vagă (fuzzy logic). Calitatea de a fi copil pare să se estompeze treptat, la fel cum și calitatea de a fi adult (biologic) pare să se estompeze cu trecerea timpului. Pare firesc să presupunem că valoarea de adevăr a lui „Jack este copil“ se estompează, de asemenea, de la adevărat la fals. Prin urmare, adevărul are mai multe grade. Să presupunem că măsurăm aceste grade prin numere între 1 și 0, 1 fiind complet adevărat, iar 0 complet fals. Așadar, fiecare situație atribuie fiecărei propoziții de bază un astfel de număr.

Dar ce putem spune despre propozițiile care conțin operatori precum negația și conjuncția? Pe măsură ce Jack crește, valoarea de adevăr a lui „Jack este copil“ scade. Valoarea de adevăr a lui „Jack nu este copil“ ar părea să crească în mod corespunzător. Aceasta sugerează că valoarea de adevăr a lui ¬a este 1 minus valoarea de adevăr a lui a. Să presupunem că scriem valoarea de adevăr a lui a ca |a|; așadar, vom avea:

$$|\neg a| = 1 - |a|$$

Iată un tabel cu unele valori ale eşantioanelor:

a	¬a
1 0,75 0,5 0,25 0	0 0,25 0,5 0,75 1

Dar valoarea de adevăr a conjuncțiilor? O conjuncție poate fi la fel de bună ca și cel mai rău fragment din ea. Așadar, este firesc să presupunem că valoarea de adevăr a lui a & b este minima (cea mai mică) dintre |a| și |b|.

$$|a \,\&\, b| = \mathrm{Min}(|a|,|b|)$$

Iată un tabel cu unele dintre valorile eșantioanelor. Valorile lui a sunt scrise pe coloana din stânga; valorile lui b sunt scrise de-a lungul rândului de sus. Valorile corespunzătoare ale a & b sunt scrise la intersecția dintre rândul și coloana corespunzătoare. De exemplu, dacă vrem să aflăm |a & b|, unde |a| = 0,25 și |b| = 0,5, vedem unde se întâlnesc cifrele scrise cu italice din rândul și coloana respective. Rezultatul este scris cu bold.

a & b	1	0,75	0,5	0,25
1	1	0,75	0,5	0,25
0,75	0,75	0,75	0,5	0,25
0,5	0,5	0,5	0,5	0,25
0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
0	0	0	0	0

Similar, valoarea disjuncţiei este maxima (cea mai mare) valorilor operanzilor disjunctivi:

$$|a \vee b| = \mathrm{Max}(|a|,|b|)$$

Te las să construieşti un tabel cu unele valori ale eşantioanelor. Nu uita însă că, potrivit celor de mai sus, ¬, & şi $\vee$ sunt totuşi funcţii de adevăr. Adică, de pildă, valoarea de adevăr a lui a & b este determinată de valorile de adevăr ale lui a şi b. Doar că acum aceste valori sunt numere între 0 şi 1, în loc de A şi F. (Poate că merită remarcat totuşi că, dacă ne gândim la 1 ca la A şi la 0 ca la F, rezultatele unde sunt implicate doar 1 şi 0 sunt aceleaşi ca pentru funcţiile de adevăr din capitolul 2, aşa cum ai putut verifica singur.)

Dar ce putem spune despre condiţionale? Am văzut în capitolul 7 că există motive întemeiate să presupunem că $\rightarrow$ nu este o funcţie de adevăr, dar să lăsăm deoparte, deocamdată, aceste îngrijorări. Dacă este o funcţie de adevăr, care dintre funcţiile de adevăr este, acum când avem de luat în calcul diferite grade de adevăr? Nici un răspuns nu pare evident. Iată o sugestie (destul de standard), care cel puţin pare să dea genul corect de rezultate.

Dacă $|a| \leq |b|$: $|a \rightarrow b| = 1$

Dacă $|b| < |a|$: $|a \rightarrow b| = 1 - (|a| - |b|)$

(< înseamnă „este mai mic decât“); ≤ înseamnă „mai mic decât sau egal cu“.) Astfel, dacă antecedentul este mai puţin adevărat decât consecventul, condiţionala este complet adevărată. Dacă antecendentul este mai adevărat decât consecventul, atunci condiţionala este mai mică decât adevărul maximal prin

diferența dintre valorile lor (adică prin cantitatea cu care adevărul scade). Iată un tabel cu unele valori ale eșantioanelor. (Nu uita că valorile lui a sunt scrie pe verticală, pe coloana din stânga, iar cele ale lui b pe orizontală, pe rândul de sus.)

a → b	1	0,75	0,5	0,25	0
1	1	1	1	1	1
0,75	1	1	1	1	1
0,5	0,75	1	1	1	1
0,25	0,5	0,75	1	1	1
0	0,25	0,5	0,75	1	1

Dar ce putem spune despre validitate? O inferenţă este validă dacă şi concluzia rezistă în orice situaţie în care premisele rezistă. Dar ce înseamnă că un lucru rezistă într-o situaţie? Înseamnă că este suficient de adevărat. Dar cât de adevărat înseamnă „suficient de adevărat“? Aceasta depinde de context. De exemplu, „este o motocicletă nouă“ reprezintă un predicat vag. Dacă mergi la un vânzător de motociclete care îţi spune că o anumită motocicletă este nouă, te aştepţi ca aceasta să nu mai fi fost folosită niciodată. Adică te aştepţi ca „Aceasta este o motocicletă nouă“ să aibă valoarea 1. Pe de altă parte, să presupunem că mergi la un raliu de motociclete şi eşti rugat să alegi motocicletele noi. Vei alege motociclete care au mai puţin de un an vechime. Cu alte cuvinte, criteriile pentru ceea ce poate fi acceptat drept o motocicletă nouă sunt acum mai relaxate. „Aceasta este o motocicletă nouă“ trebuie să aibă o valoare de doar, să zicem, 0,9 sau mai mare.

Aşadar, presupunem că există un anumit nivel de acceptabilitate, determinat de context. Acesta va fi un număr între 0 şi 1 – poate chiar 1 în cazuri extreme. Să scriem acest număr ca ε. Atunci o interferenţă este validă pentru acel context doar dacă şi concluzia are o valoare cel puţin la fel de mare ca ε în orice situaţie în care toate premisele au valori cel puţin la fel de mari ca ε.

Dar ce influenţă au toate acestea asupra paradoxului soriţilor? Să presupunem că avem o succesiune de soriţi. Ca şi mai sus, fie an propoziţia „Jack este copil după n secunde“; dar pentru a putea controla lucrurile mai uşor, să presupunem că Jack creşte în patru secunde! Atunci, o înregistrare a valorilor de adevăr ar putea fi:

a0	a1	a2	a3	a4
1	0,75	0,5	0,25	0

a0 → a1 are valoarea 0,75 (= (1 – (1 – 0,75)); la fel a1 → a2; de fapt, fiecare condiţională de forma an → an+1 are valoarea 0,75.

Ce ne spune acest lucru despre paradoxul soriţilor depinde de nivelul de acceptabilitate ε care acţionează aici. Să presupunem că şi contextul este unul care impune cel mai ridicat nivel de acceptabilitate; ε este 1. În acest caz, modus ponens este valid. Să presupunem că |a| = 1 şi |a → b| = 1. Cum |a → b| = 1, trebuie să avem |a| ≤ |b|. De aici decurge că |b| = 1. Astfel, argumentul soriţilor este valid. În acest caz însă, fiecare premisă condiţională cu valoarea 0,75 este inacceptabilă.

Dacă, pe de altă parte, impunem un nivel de acceptabilitate mai scăzut de 1, atunci modus ponens se dovedeşte invalid. Să presupunem, pentru a ilustra aceasta, că ε este 0,75. Aşa cum am văzut, a1 şi a1 → a2 au ambele valoarea 0,75, dar a2 are valoarea 0,5, adică mai mică de 0,75.

Oricum am privi lucrurile, aşadar, argumentul nu se susţine. Fie unele premise sunt inacceptabile, fie, dacă sunt acceptabile, concluziile nu decurg în mod valid. De ce suntem prinşi aşa de uşor în mrejele argumentelor soriţilor? Poate deoarece confundăm adevărul complet cu un adevăr aproape complet. Un eşec în a distinge între ele nu are, în mod normal, o importanţă prea mare. Dar dacă îl repeţi mereu şi mereu, şi mereu... începe să aibă.

Acesta este un diagnostic al problemei. Dar în cazul vaguităţii, nimic nu este bătut în cuie. Care a fost problema în a spune că „Jack este un copil“ este pur şi simplu adevărat, până la un anumit moment din timp, când devine pur şi simplu fals? Doar că nu pare să existe un asemenea punct. Indiferent ce loc am alege pentru a trage linia, el ar fi complet arbitrar; poate fi, cel mult, o chestiune de convenţie. Dar în ce moment din timpul creşterii Jack încetează să mai fie 100% copil? Adică în ce moment „Jack este copil“ se schimbă din a avea

valoarea de exact 1 într-o valoare de sub 1? Orice loc am alege pentru a trage această linie va părea la fel de arbitrar ca și mai înainte. (Aceasta este numită uneori problema vaguității de ordin superior.) Dacă acest lucru este corect, nu am rezolvat, de fapt, cea mai fundamentală problemă în privința vaguității, ci doar am relocat-o.

Ideile principale ale capitolului

- Valorile de adevăr sunt numere între 0 și 1 (inclusiv).
- $|\neg a| = 1 - |a|$
- $|a \vee b| = Max(|a|, |b|)$
- $|a \,\&\, b| = Min(|a|, |b|)$
- $|a \rightarrow b| = 1$ dacă $|a| \leq |b|$; $|a \rightarrow b| = 1 - (|a| - |b|)$ în caz contrar.
- O propoziție este adevărată într-o situație doar dacă valoarea ei de adevăr este cel puțin la fel de mare ca nivelul de acceptabilitate (determinat contextual).

Capitolul 11. Probabilitate: straniul caz al clasei de referință lipsă

Capitolele precedente ne-au oferit cel puțin o explicație pentru care inferențele sunt valide deductiv și de ce anume. Acum este momentul să revenim la chestiunea validității inductive, adică validitatea acelor inferențe unde premisele oferă un oarecare temei pentru concluzie, dar unde, chiar dacă premisele sunt adevărate în unele situații, concluzia tot se poate dovedi falsă.

Așa cum am precizat în capitolul 1, Sherlock Holmes era foarte priceput la acest tip de inferențe. Să începem cu un exemplu avându-l drept erou. Misterul din Liga Roșcaților începe când Holmes și dr. Watson primesc vizita unui anume domn Jabez Wilson. Când Wilson intră, Watson caută să afle ce a dedus Holmes în privința lui (figura 11):

„– Dincolo de faptul evident că a muncit cu brațele la un moment dat, că prizează tutun, că este francmason, că a fost în China și că în ultima vreme a scris foarte mult, nu pot deduce nimic altceva.“

Domnul Jabez Wilson s-a foit pe scaun, cu degetul arătător pe hârtie, dar cu ochii ațintiți asupra tovarășului meu.

– Pentru numele lui Dumnezeu, de unde știți toate astea, domnule Holmes? a întrebat el.“

Holmes este încântat să explice. De pildă, în privința scrisului:

„Ce altceva poate indica acea dungă atât de lucioasă, lată de cinci inci, de pe manșeta dreaptă a hainei, și pata de lângă cotul mâinii stângi, unde îți sprijini brațul de birou?“

În ciuda faptului că Holmes nu denumește acest tip de inferență „deducție“, ea este totuși o inferență inductivă. Este foarte posibil ca haina lui Wilson să fi prezentat aceste trăsături și fără ca el să fi scris atât de mult. El ar fi putut, de pildă, să o fi furat de la cineva care într-adevăr scria mult. Cu toate astea, inferența este în mod clar una reușită. Ce face această inferență, dar și altele similare, reușite? Un răspuns plauzibil poate fi dat în termeni de probabilitate. Așadar, să discutăm despre asta, apoi ne putem întoarce la chestiune.

11. Holmes își expune abilitățile logice.

Mary Evans Picture Library

O probabilitate este un număr atribuit unei propoziții, care măsoară cât de posibil este, într-un sens, ca propoziţia respectivă să fie adevărată. Să scriem pr(a) pentru probabilitatea lui a. Convenţional, măsurăm probabilităţile pe o scară de la 0 la 1. Dacă pr(a) = 0, a este cu certitudine falsă; apoi, pe măsură ce pr(a) creşte, devine tot mai posibil ca a să fie adevărată, până când pr(a) = 1, unde 1 este cu certitudine adevărată.

Ce altceva se mai poate spune despre aceste numere? Permiteţi-mi să ilustrez cu un simplu exemplu. Să presupunem că luăm în considerare zilele unei anumite săptămâni. Fie c o propoziţie care este fie falsă, fie adevărată în fiecare zi – să spunem „Este cald“ – şi fie p o alta – să spunem „Plouă“. Informaţia relevantă poate fi dată în următorul tabel:

	Luni	Marţi	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
c			P	P		P	P
p		P	P			P	

Spațiile bifate arată că propoziția este adevărată în acea zi; spațiile goale arată că nu a fost adevărată.

Acum, dacă discutăm despre această săptămână anume, care este probabilitatea ca în orice zi, aleasă la întâmplare, să fi fost cald? Au fost patru zile calde, dintr-un total de șapte. Așadar, probabilitatea este 4/7. Similar, au fost trei zile în care a plouat, deci probabilitatea de ploaie este 3/7:

$$pr(c) = 4/7$$

$$pr(p) = 3/7$$

În general, dacă scriem #a pentru a desemna numărul de zile în care propoziția a este adevărată și N pentru numărul total de zile avem:

$$pr(a) = \#a/N$$

În ce mod probabilitatea are legătură cu negația, conjuncția și disjuncția? Mai întâi să abordăm negația. Care este probabilitatea lui ¬c? Ei bine, au fost trei zile în care nu a fost cald, deci pr(¬c) = 3/7. De notat că pr(c) și pr(¬c) fac în total 1. Aceasta nu este o întâmplare. Avem:

$$\#c + \#\neg c = N$$

Împărțind ambele părți la N, obținem:

$$\#c + \#\neg c = 1$$

N N

Adică pr(c) + pr(¬c) = 1.

Pentru conjuncție și disjuncție: există două zile în care a fost cald, dar a și plouat, deci pr(c & p) = #(c & p)/N = 2/7. Și există cinci zile în care a fost fie cald, fie ploaie, deci pr(c ∨ p) = #(c ∨ p)/N = 5/7. Care este relația dintre aceste două numere? Pentru a afla numărul de zile în care c ∨ p este adevărată, adăugăm apoi numărul de zile în care p este adevărată. Acest lucru nu este prea ușor, întrucât unele zile vor trebui numărate de două ori: miercuri și sâmbătă. Acestea sunt zilele în care a fost și cald, și a și plouat. Așadar, pentru a afla cifra corectă, va trebui să scădem numărul de zile când a fost și cald, și a și plouat:

$$\#(c \vee p) = \#c + \#p - \#(c \& p)$$

Împărțind ambele părți la N, obținem:

$$\#(c \vee p) = \#c + \#p - \#(c \& p)$$

N N N N

Aceasta este:

$$pr(c \vee p) = pr(c) + pr(p) – pr\ (c \& p)$$

Aceasta este relaţia generală dintre probabilităţile conjuncţiilor şi disjuncţiilor.

În capitolul 10 am văzut că gradele de adevăr pot fi, de asemenea, măsurate prin numere între 0 şi 1, şi ar putea părea firesc să presupunem că gradele de adevăr şi probabilităţile sunt aceleaşi, dar nu sunt. În particular, conjuncţia şi disjuncţia funcţionează total diferit. Pentru gradele de adevăr, disjuncţia este o funcţie de adevăr. Mai precis, $|c \vee p|$ este maximum pentru $|c|$ şi $|p|$. Dar $pr\ (c \vee p)$ nu este determinat doar de $pr(c)$ şi $pr(p)$, aşa cum tocmai am văzut. În particular, pentru c şi p din exemplul nostru, $pr(c) = 4/7$, $pr(p) = 3/7$ şi $pr\ (c \vee p) = 5/7$. Dar dacă $|c| = 4/7$ şi $|p| = 3/7$, $|c \vee p| = 4/7$, nu 5/7.

Înainte de a reveni la inferenţele inductive, mai avem nevoie de câteva informaţii despre probabilitate. Dată fiind săptămâna luată de exemplu de noi, probabilitatea ca într-o zi, aleasă la întâmplare, să fi plouat, este 3/7. Dar să presupunem că ştii că ziua respectivă a fost una caldă. Care este acum probabilitatea ca atunci să fi plouat? Ei bine, au fost patru zile calde, dar doar două dintre acestea au fost şi ploioase, deci probabilitatea este de 2/4. Aceasta este numită probabilitate condiţională şi este scrisă astfel: $pr(p|c)$, probabilitatea lui p dată fiind c. Dacă ne gândim puţin, putem oferi o formulă generală pentru calcularea probabilităţilor condiţionale. Cum am ajuns la fracţia 2/4? Mai întâi, ne-am restrâns la acele zile când c este adevărată; apoi am împărţit rezultatul la numărul acelor zile când p este adevărată, adică numărul de zile când şi c, şi p sunt adevărate. Cu alte cuvinte:

$$pr(p \mid c) = \#(c \& p) : \#c$$

Puțină algebră ne spune că aceasta este egal cu:

$$\#(c \,\&\, p) : \#c$$

N N

Și aceasta este pr(c & p) : pr(c).

Așadar, iată formula noastră generală pentru probabilitatea condițională:

PC: pr(p | c) = pr(c & p)/pr(c)

Este necesară însă o oarecare grijă în aplicarea acestei formule. Împărțirea la 0 nu are sens. 3/0, de pildă, nu are nici o valoare. Matematicienii numesc această proporție nedefinită. În formula pentru pr(p|c), am împărțit la pr(c), ceea ce are sens numai dacă aceasta nu este zero, adică doar dacă c este adevărată cel puțin uneori. Altfel, probabilitatea condițională este nedefinită.

Acum putem reveni, în sfârșit, la inferențele inductive. Ce anume îi trebuie unei inferențe pentru a fi validă deductiv? Pur și simplu ca premisele să facă concluzia mai probabilă decât zero. Adică, probabilitatea condițională a lui c, concluzia, dată fiind p, premisa (sau conjuncția premiselor, dacă sunt mai multe) este mai mare decât cea a negației lui c:

$$pr(c \mid p) > pr(\neg c \mid p)$$

Astfel, dacă realizăm un raţionament privind săptămâna ilustrată de noi, inferenţa:

A fost o zi ploioasă; prin urmare, a fost o zi caldă;

este validă inductiv. Întrucât este uşor de verificat, pr(c|p) = 2/3 şi pr(¬c|p) = 1/3.

Analiza poate fi aplicată pentru a demonstra de ce inferenţa lui Holmes, cu care am început capitolul, este validă. Holmes a concluzionat că Jabez Wilson - scrisese mult (c). Premisa lui a pornit de la faptul că pe haina lui Wilson (p) existau urme de uzură. Dacă ne-am întoarce în timp, în Londra epocii lui Holmes, şi am aduna toţi oamenii cu manşete uzate de genul celor în chestiune, atunci majoritatea acelor oameni ar fi funcţionari, persoane stau la birou şi scriu – sau cel puţin aşa am putea presupune. Astfel, probabilitatea ca Jabez să fi scris mult, dat fiind faptul că haina lui purta acele urme de uzură, este mai ridicată decât probabilitatea să nu fi scris. Inferenţa lui Holmes este într-adevăr validă inductiv.

Dar permiteţi-mi să închei remarcând o enigmă generată de mecanismul pe care tocmai l-am desfăşurat. Aşa cum am văzut, o probabilitate poate fi calculată sub formă de proporţie: luăm o anumită clasă de referinţă; apoi calculăm numerele diferitelor grupuri din cadrul acesteia; apoi facem împărţirile necesare. Dar ce clasă de referinţă folosim? În exemplul ilustrativ privind vremea, am început prin a specifica această clasă: zilele dintr-o anumită săptămână. Dar problemele din viaţa reală nu se pun în acest fel.

Să revenim la Jabez Wilson. Pentru a stabili probabilităţile relevante în acest caz, am sugerat să implicăm o clasă de referinţă cuprinzând oamenii din Londra

epocii lui Sherlock Holmes. De ce procedăm astfel? De ce nu luăm în calcul oamenii care trăiau atunci în toată Anglia sau în Europa, ori doar bărbații din Londra, ori doar oamenii care-și puteau permite să-i solicite sfatul lui Holmes? Poate, în unele cazuri, acest lucru nu ar schimba prea mult lucrurile. Dar cu siguranță în altele ar face. De exemplu, oamenii care veneau să-l consulte pe Holmes erau relativ înstăriți și deci era puțin probabil să poarte haine uzate. Lucrurile ar fi putut sta altfel în cazul unei populații mai largi. Așadar, care ar trebui să fie clasa de referință adecvată? Acesta este genul de întrebare care îi ține treji noaptea pe agenții companiilor de asigurări, în încercările lor de a stabili factorii de risc.

În ultimă analiză, cea mai precisă clasă de referință ar părea să fie una alcătuită doar din Wilson însuși. În definitiv, ce legătură ar avea cu el informațiile legate de alți oameni? Dar în acest caz, el fie ar fi scris mult, fie nu. În primul caz, probabilitatea ca el să fi scris mult, dat fiind că avea manșeta lucioasă, este 1, iar inferența este validă; în al doilea, este 0, iar inferența nu este validă. Cu alte cuvinte, validitatea inferenței depinde în întregime de adevărul concluziei. Așadar, nu poți folosi inferența pentru a stabili dacă concluzia este sau nu adevărată. Dacă ajungem atât de departe, noțiunea de validitate oferită este în întregime inutilă.

Ideile principale ale capitolului

- Probabilitatea unei afirmații reprezintă numărul de cazuri în care aceasta este adevărată, împărțit la numărul de cazuri din clasa de referință.
- $pr(\neg a) = 1 - pr(a)$
- $pr(a \vee b) = pr(a) + pr(b) - pr(a \,\&\, b)$
- $pr(a \mid b) = pr(a \,\&\, b)/pr(b)$
- O inferență este validă inductiv doar dacă probabilitatea condițională a concluziei, dată fiind conjuncția premiselor, este mai mare decât negația ei, date fiind premisele.

Capitolul 12. Probabilitate inversă: nu poți fi indiferent la asta!

Capitolul 11 ne-a oferit o înțelegere de bază a probabilității și a rolului pe care aceasta l-ar putea avea în inferențele inductive. În acest capitol vom examina alte aspecte ale probabilității. Să începem prin a lua în considerare o inferență inductivă faimoasă.

Universul fizic nu este un amestec haotic, pur întâmplător. El prezintă modele foarte distincte: materia este structurată în galaxii (figura 12) care, la rândul lor, sunt structurare în stele și sisteme planetare, iar pe unele dintre aceste sisteme planetare materia este structurată astfel încât să producă ființe vii, ca mine și ca tine. Care este explicația? Ai putea crede că explicația este dată de legile fizicii și ale biologiei. Și ar putea să fie astfel. Dar de ce legile fizicii și ale biologiei sunt așa cum sunt? În definitiv, ele ar fi putut să fie total diferite. De exemplu, gravitația ar fi putut fi o forță de respingere, nu de atracție. În acest caz, nu ar fi existat niciodată bucăți de materie, iar viața, așa cum o cunoaștem azi, ar fi fost imposibilă pretutindeni în univers. Nu ne oferă acest lucru un motiv excelent pentru a crede în existența unui creator al universului – o ființă inteligentă care a făcut universul să existe, împreună cu legile sale fizice și biologice, pentru un anume scop sau altul? Pe scurt, faptul că universul fizic este ordonat în acest fel nu ne oferă oare motivul de a crede în existența unui Dumnezeu de un anumit fel?

12. Materia are o structură distinctivă – o galaxie spirală.

© Chris Butler/Science Photo Library

Acest argument (pentru existența lui Dumnezeu) este numit adesea teleologic (Argument pentru Plan). Să examinăm lucrurile mai îndeaproape. Premisa argumentului, o, este o afirmație care susține că universul este ordonat într-un anumit fel. Concluzia, d, susține existența unui Dumnezeu-Creator. Dacă d nu ar fi adevărată, o ar fi cu totul improbabilă; așadar, continuă argumentul, dată fiind o, d este probabilă. Acum, este cu certitudine adevărat că posibilitatea condițională a lui o, dacă d este adevărată, este mult mai ridicată decât a lui o, dacă d este falsă:

1. pr(o|d) > pr(o|¬d)

Dar aceasta nu ne oferă ceea ce dorim. Pentru ca o să fie un bun motiv inductiv pentru d, avem nevoie ca probabilitatea lui d, dată fiind o, să fie mai mare decât cea a negației sale:

2. pr(d|o) > pr(¬d|o)

Iar faptul că pr(o|d) este ridicată nu înseamnă neapărat că pr(d|o) este ridicată. De exemplu, probabilitatea ca tu să fii în Australia, dat fiind că tocmai ai văzut un cangur în sălbăticie, este foarte ridicată. (Cangurul poate să trăiască în sălbăticie în orice altă regiune a lumii, dacă a evadat de la grădina zoologică). Dar probabilitatea ca tu să vezi un cangur în sălbăticie, dat fiind că te afli în Australia, este foarte scăzută. (Abia după ce am trăit zece ani în Australia am văzut unul.)

pr(o|d) și pr(d|o) sunt denumite probabilități inverse și ce am văzut aici este că, pentru ca argumentul teleologic să funcționeze, relația dintre ele trebuie să fie astfel încât să ne conducă de la 1 la 2. Și ne conduce? De fapt, există o relație

foarte simplă între probabilitățile inverse. Să ne reamintim de ecuația PC din capitolul 11, care, prin definiție:

$$pr(a \mid b) = pr(a \,\&\, b)/pr(b)$$

Prin urmare:

3. pr(a|b) × pr(b) = pr(a & b)

La fel,

$$pr(b|a) = pr(b \,\&\, a)/pr(a)$$

Prin urmare,

4. pr(b|a) × pr(a) = pr(b & a).

Dar pr(a & b) = pr(b & a), întrucât a & b și b & a sunt adevărate în exact aceleași situații. Astfel, 3 și 4 ne dau:

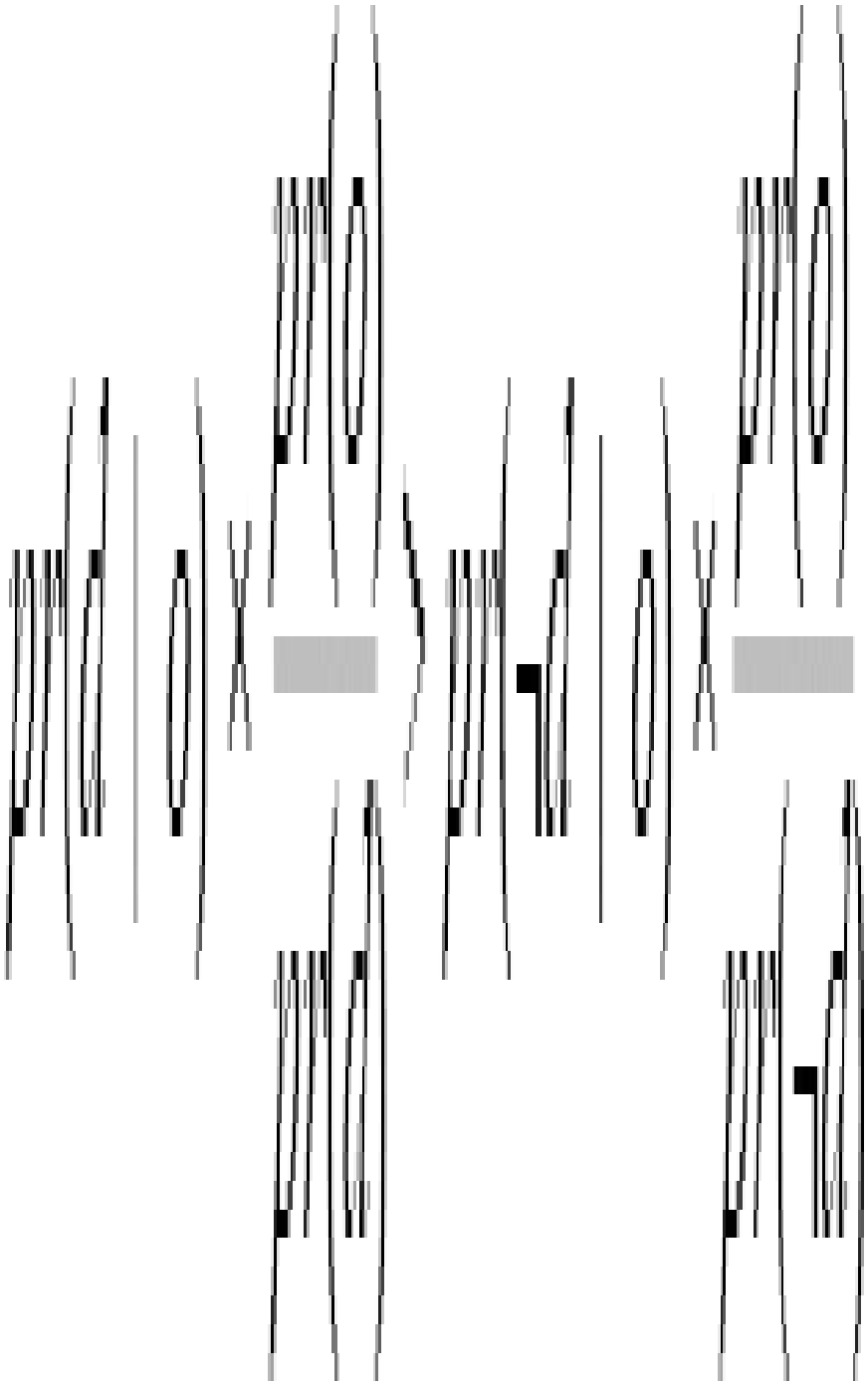
$$pr(a|b) \times pr(b) = pr(b|a) \times pr(a)$$

Presupunând că pr(b) nu este o – voi face presupuneri de acest gen fără alte menţionări – putem rearanja această ecuaţie încât să obţinem:

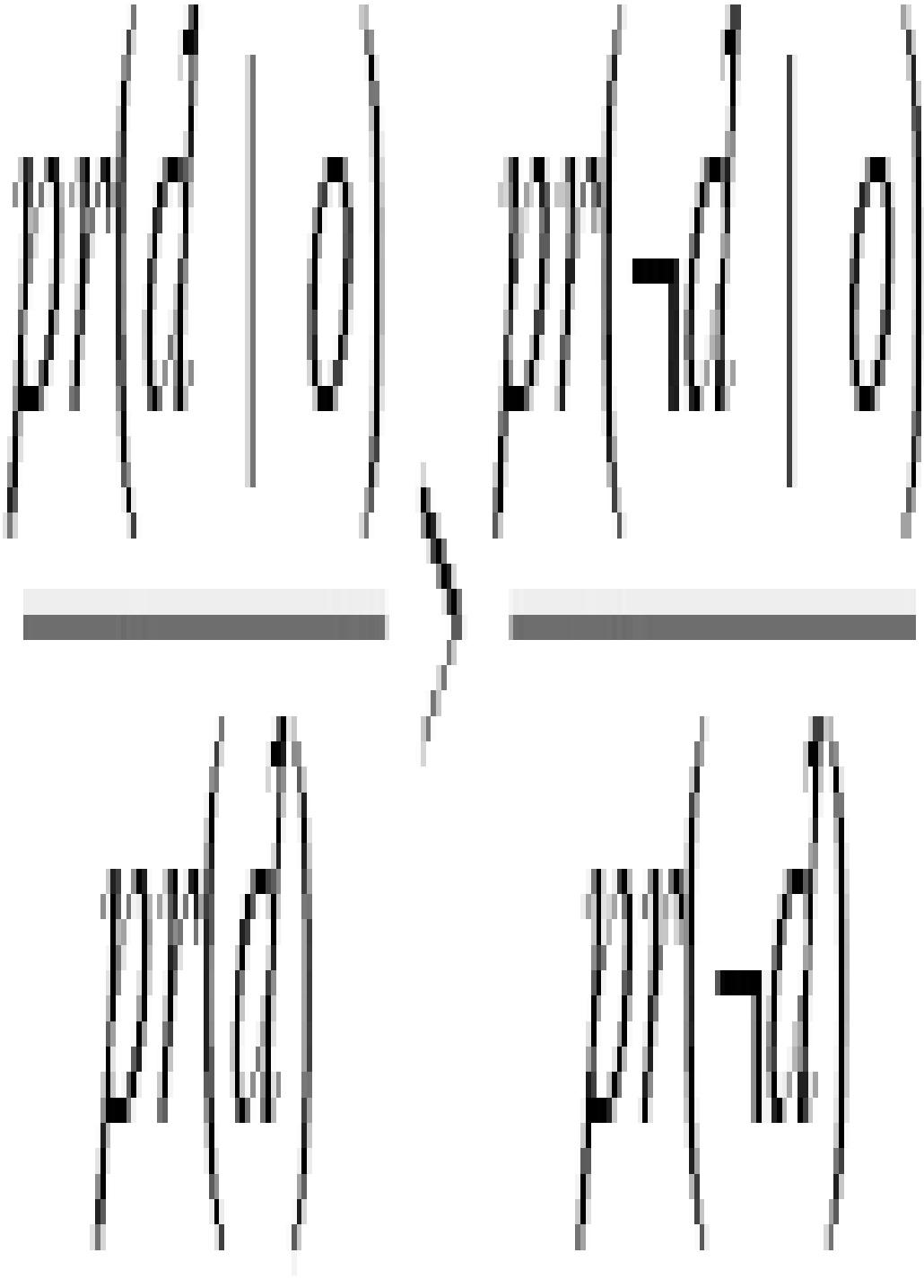
Inv: pr(a|b) = pr(b|a) x pr(a)/pr(b)

Aceasta este relaţia dintre probabilităţile inverse. (Pentru a ne reaminti, ar putea fi util să observăm că în partea dreaptă, după semnul =, apare mai întâi b urmat de un a, apoi a urmat de b.)

Folosind Inv pentru a rescrie probabilităţile inverse în 1, obţinem:



Și anulând pr(o) de ambele părţi avem:



Sau, rearanjând ecuația:

5.

Să ne amintim că, pentru ca argumentul teleologic să funcționeze, trebuie să ajungem la 2, ceea ce este echivalent cu:

$$pr(d|o) > 1$$

pr(¬d|o)

Ar putea părea că singurul lucru plauzibil care ne va conduce la aceasta pornind de la 5 este , adică:

$$pr(d) \geq pr(\neg d)$$

Valorile lui pr(d) și pr(¬d) sunt numite probabilități anterioare, adică probabilitățile lui d și ¬d înainte de aplicarea oricărei evidențe, precum o. Ca atare, ceea ce pare să avem nevoie pentru a face argumentul funcțional este ca probabilitatea anterioară conform căreia există un Dumnezeu-Creator să fie mai mare (sau egală) cu probabilitatea anterioară că nu există.

Așa este? Din nefericire, nu avem nici un motiv să credem asta. De fapt, ar părea că lucrurile stau chiar invers. Să presupunem că nu știi ce zi a săptămânii

este. Fie l ipoteza că este luni. Aşadar, ¬l este ipoteza că nu este luni. Care ipoteză este mai probabilă: l sau ¬l? Cu siguranţă ¬l: deoarece există mult mai multe variante să nu fie luni decât să fie luni (ar putea să fie marţi, miercuri, joi...). La fel se întâmplă şi în cazul lui Dumnezeu. Este posibil să existe multe modalităţi diferite în care universul ar fi putut să fie. Şi intuitiv, relativ puţine dintre acestea sunt semnificativ ordonate: ordinea este ceva special. Acesta este, în definitiv, factorul care dă consistenţă argumentului teleologic. Dar atunci există relativ puţine universuri în care există un ordonator. Aşadar, a priori este mult mai probabil să nu existe un Creator decât să existe.

Am văzut aşadar că argumentul teleologic nu se susţine. El este seducător deoarece oamenii confundă adesea posibilităţile cu inversul acestora, astfel încât trec peste o parte crucială a argumentului.

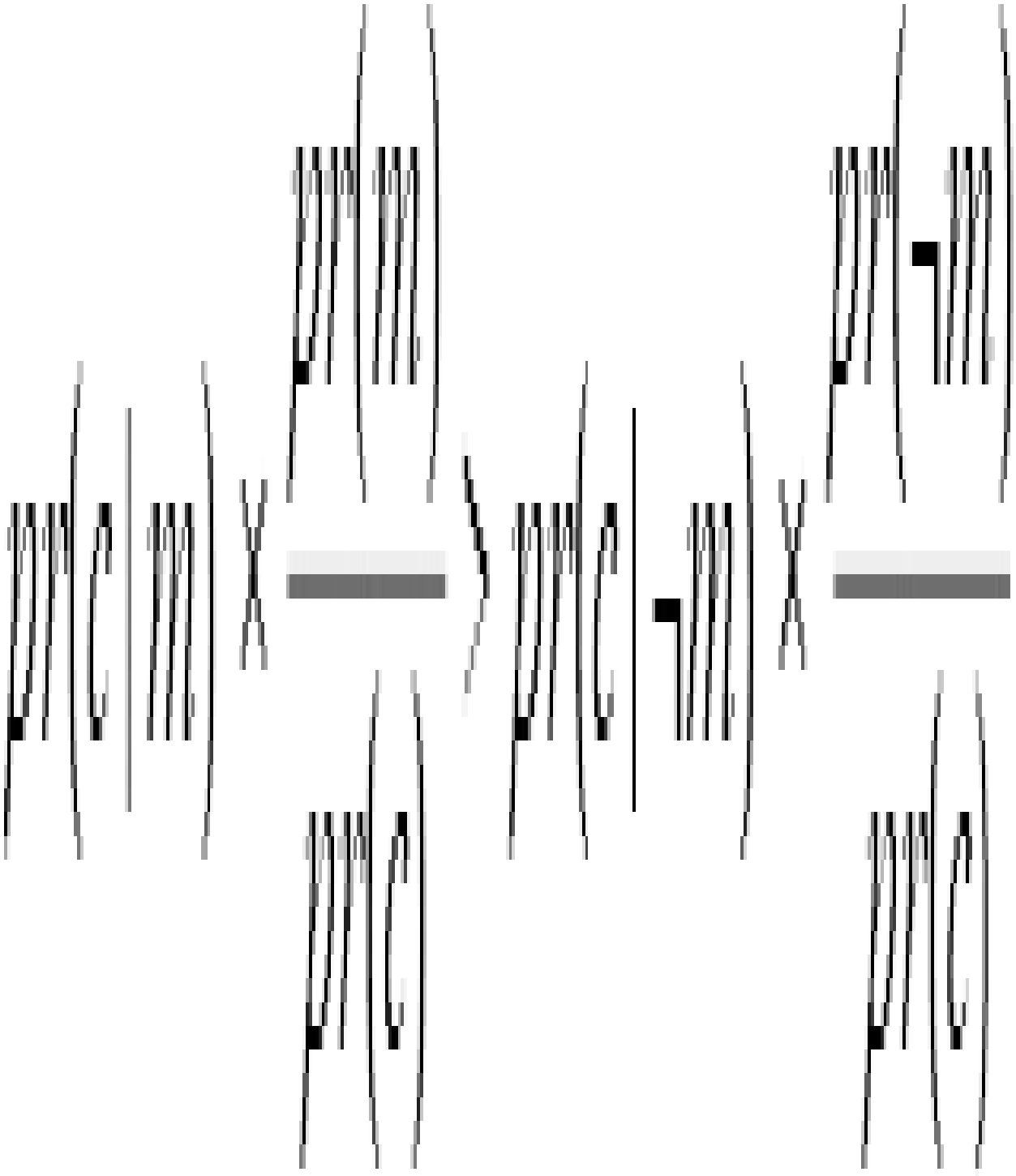
Multe argumente inductive ne cer să recurgem la un raţionament bazat pe probabilităţi inverse. Argumentul teleologic nu este special în această privinţă. Dar multe argumente reuşesc să facă asta mai bine. Dă-mi voie să ilustrez printr-un exemplu. Să presupunem că vizitezi un cazinou local, unde există două rulete. Să le numim A şi B. Un prieten ţi-a spus că una dintre ele este măsluită – deşi nu a putut preciza şi care anume. În loc ca bila ei să cadă în jumătate dintre situaţii pe sectoarele roşii şi în cealaltă pe cele negre, cum ar fi normal, ruleta măsluită are o bilă care cade în ¾ din situaţii pe roşu şi în ¼ din situaţii pe negru. (La drept vorbind, ruletele reale au uneori şi sectoare verzi, dar să ignorăm acest fapt de dragul simplităţii.) Acum, să presupunem că priveşti una dintre rulete, să spunem A, şi la cinci rotaţii succesive ea dă rezultatele:

R, R, R, R, N

(R este roşu, N este negru). Eşti îndreptăţit să crezi că această ruletă este cea măsluită? Cu alte cuvinte, fie c o afirmaţie prin care se susţine că această combinaţie de rezultate a fost întâmplătoare şi fie m o afirmaţie prin care se susţine că ruleta A este măsluită. Este inferenţa care porneşte de la c şi ajunge la

m o bună inferenţă inductivă?

Trebuie să ştim dacă pr(m|c) > pr(¬m|c). Folosind ecuaţia Inv pentru a converti aceasta într-o relaţie între probabilităţi inverse, înseamnă că:



Înmulţind ambele părţi cu pr(c) obţinem:

$$pr(c|m) \times pr(m) > pr(c|\neg m) \times pr(\neg m)$$

Este aceasta adevărată? Pentru început, care sunt probabilităţile anterioare ale lui m şi ¬m? Ştim că fie A, fie B este măsluită (dar nu ambele). Nu avem mai multe motive să credem că este ruleta A mai curând decât ruleta B sau invers. Aşadar, probabilitatea să fie vorba despre ruleta A este ½ şi probabilitatea să fie vorba despre ruleta B este tot ½. Cu alte cuvinte, pr(m) = ½ şi pr(¬m) = ½. Aşadar, eliminăm toate acestea, astfel încât condiţia relevantă devine:

$$pr(c|m) > pr(c|\neg m)$$

Probabilitatea observării succesiunii de rezultate notate cu c, dacă acceptăm că ruleta este măsluită în modul descris, pr(c|m), este $(3/4)^4 \times (1/4)$. (Nu contează dacă nu ştii de ce, e suficient să te bazezi pe cuvântul meu.) Aceasta înseamnă $81/4^5$, adică 0,079. Probabilitatea ca succesiunea să fie respectată, dacă acceptăm că ruleta nu este măsluită şi deci se învârte corect, pr(c|¬m) este $(½)^5$ (din nou, bazează-te pe cuvântul meu, dacă vrei), ceea ce înseamnă 0,031. Adică mai puţin decât 0,079. Aşadar, inferenţa este validă.

Felul cum am stabilit aici probabilităţile anterioare merită remarcat. Avem două posibilităţi: fie ruleta A este măsluită, fie ruleta B. Şi nu avem nici o informaţie care să ne ajute să facem distincţia între aceste două posibilităţi. Aşadar, le atribuim aceeaşi probabilitate. Aceasta este o aplicare a principiului indiferenţei. Principiul ne spune că, atunci când avem un număr de posibilităţi fără nici o diferenţă relevantă între ele, toate posibilităţile au aceeaşi probabilitate. Astfel, dacă există în total N posibilităţi, fiecare are probabilitatea 1/N. Principiul

indiferenţei este un fel de principiu al simetriei.

De remarcat că nu putem aplica principiul în argumentul teleologic. În cazul ruletei, există două situaţii posibile care sunt complet simetrice: ruleta A este măsluită; ruleta B este măsluită. În argumentul teleologic, există două situaţii: un Dumnezeu-Creator există; un Dumnezeu-Creator nu există. Dar aceste două situaţii nu sunt mai simetrice decât situaţia astăzi este luni; astăzi nu este luni. Aşa cum am văzut, intuitiv, există mult mai multe posibilităţi să nu existe un Creator decât să existe.

Principiul indiferenţei este o parte importantă a raţionamentului intuitiv despre probabilitate. Să încheiem acest capitol notând că el nu este lipsit totuşi de probleme. Se ştie prea bine că el duce la paradoxuri în anumite aplicări. Iată un asemenea caz:

Să presupunem că un autoturism pleacă din Brisbane la ora 12.00, deplasându-se către un oraş aflat la 300 km depărtare. Autovehiculul are o viteză constantă, undeva între 50 km/h şi 100 km/h. Ce putem spune despre probabilitatea momentului în care ajunge la destinaţie? Ei bine, dacă merge cu 100 km/h, va ajunge la ora 15.00, iar dacă merge cu 50 km/h, va ajunge la ora 18.00. Ca atare, el va ajunge undeva între aceste două momente. Momentul de mijloc dintre cele două este 16.30. Aşadar, prin principiul indiferenţei, este probabil ca autovehiculul să sosească atât înainte de 16.30, cât şi după această oră. Dar o viteză medie între 50 km/h şi 100 km/h este 75 km/h. Aşadar, tot prin principiul indiferenţei, este la fel de probabil ca autovehiculul să se deplaseze cu peste 75 km/h, ca şi cu sub 75 km/h. Dacă el se deplasează cu 75 km/h, va ajunge la 16.30. Aşadar, este la fel de probabil să ajungă înainte de 16.00, ca şi după aceea. Prin urmare, în particular, este mai probabil să sosească înainte de 16.30 decât după aceea. (Aceasta îi dă în plus o oră şi jumătate.)

Te voi lăsa să te gândeşti la toate acestea. Am discutat destul despre probabilitate pentru un singur capitol!

Capitolul 13. Teoria deciziei: mari așteptări

Să examinăm o ultimă chestiune referitoare la raţionamentul inductiv. Acest subiect este numit uneori raţionament practic, deoarece vizează felul cum cineva ar trebui să acţioneze. Iată un faimos exemplu de raţionament practic.

Poţi alege să crezi în existenţa unui Dumnezeu (creştin); poţi alege să nu crezi. Să presupunem că alegi să crezi. Dumnezeu fie există, fie nu există. Dacă Dumnezeu există, toate bune şi frumoase. Dacă nu, atunci credinţa ta are un inconvenient minor: înseamnă că probabil ţi-ai pierdut o parte din timp la biserică şi poate că ai făcut alte câteva lucruri pe care altminteri n-ai fi vrut să le faci; dar nimic din toate acestea nu este dezastruos. Dar să presupunem, pe de altă parte, că ai ales să nu crezi în existenţa lui Dumnezeu. Dumnezeu fie există, fie nu. Dacă Dumnezeu nu există, toate bune şi frumoase. Dar, dacă Dumnezeu chiar există, atunci ai dat de bucluc, amice! Pe lumea cealaltă vei suferi straşnic, poate chiar o veşnicie, dacă nu vei avea parte de un pic de milă. Aşadar, oricare persoană înţeleaptă ar trebui să creadă în existenţa lui Dumnezeu. Este singurul plan prudent.

Acest argument este numit de obicei Pariul lui Pascal, după filosoful francez din secolul al XVII-lea, Blaise Pascal, care l-a avansat prima oară. Ce putem spune despre pariu?

Să ne gândim puţin la felul cum funcţionează acest tip de raţionament, începând cu un exemplu mai puţin controversat. Când realizăm acţiuni, adesea nu putem fi siguri de rezultatele lor, care ar putea să nu se afle întru totul sub controlul nostru. Dar de obicei putem estima cât de probabile sunt diferitele rezultate posibile; şi, la fel de important, putem estima valoarea diferitelor rezultate pentru noi înşine. Convenţional, putem măsura valoarea unui rezultat atribuindu-i un număr pe următoarea scală, deschisă în ambele direcţii:

$$..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4,...$$

Numerele pozitive sunt bune și, cu cât cresc spre dreapta, cu atât mai bine. Numerele negative sunt rele și cu cât cresc spre stânga, cu atât mai rău. Zero este punctul indiferenței: nu ne pasă, orice s-ar întâmpla.

Să presupunem acum că există o anumită acțiune pe care am putea-o întreprinde, să zicem o plimbare cu bicicleta. Dar s-ar putea să plouă. O plimbare cu bicicleta când nu plouă este un prilej excelent de distracție, deci o vom evalua, să zicem, la +10. Însă o plimbare cu bicicleta când plouă poate fi de-a dreptul groaznică, așa că o vom evalua, să zicem, cu –5. Ce valoare ar trebui să dăm singurului lucru aflau sub controlul nostru: să plecăm la plimbarea cu bicicleta? Am putea adăuga, pur și simplu, cele două cifre, +10 și –5, dar asta ar însemna să scăpăm din vedere o parte importantă a imaginii de ansamblu. Poate că este foarte improbabil să plouă, așa încât, deși posibilitatea ploii este rea, nu vrem să-i acordăm prea multă greutate. Să presupunem că șansele de ploaie sunt de 0,1: ca atare, probabilitatea că nu va ploua este de 0,9. Apoi putem pune în balanță valorile cu probabilitățile corespunzătoare, pentru a ajunge la valoarea totală:

$$0{,}1 \times (-5) + 0{,}9 \times 10$$

Rezultatul este 8,5 și se numește expectativa acțiunii în cauză, adică plimbarea cu bicicleta. (Aici, „expectativă“ reprezintă un termen tehnic; el nu are practic nimic de-a face cu sensul cuvântului așa cum este folosit acesta în mod obișnuit în limbajul cotidian.)

În general, fie a afirmația că vom realiza o anumită acțiune sau alta. Să presupunem, pentru a simplifica lucrurile, că există două rezultate posibile; să

presupunem că o1 este afirmația că se va întâmpla una dintre cele două și o2 afirmația că se va întâmpla cealaltă. În final, fie V(o) valoarea pe care o atașăm lui o dacă este adevărată. Atunci, expectativa lui a, E(a), este numărul definit de:

$$pr(o1) \times V(o1) + pr(o2) \times V(o2)$$

(Strict vorbind, probabilitățile în chestiune ar trebui să fie probabilități condiționale, pr(o1|a), respectiv pr(o2|a). Dar în exemplul dat, plimbarea cu bicicleta nu are efect asupra probabilității ploii. Același lucru este valabil și pentru toate celelalte exemple pe care le vom examina. Așadar, putem să ne rezumăm aici doar la probabilități anterioare simple.)

Până acum, totul este în regulă. Dar cum mă ajută toate acestea să mă decid dacă să ies sau nu cu bicicleta la plimbare? Cunosc valoarea totală a plimbării mele cu bicicleta. Expectativa ei este de 8,5, așa cum tocmai am văzut. Dar care este expectativa de a nu merge la plimbare cu bicicleta? Repet, fie va ploua, fie nu va ploua – probabilitățile sunt egale. Cele două rezultate sunt acum că (i) va ploua și voi sta acasă; (ii) că nu va ploua și voi sta acasă. În fiecare dintre aceste cazuri, nu voi avea parte de plăcerea unei plimbări cu bicicleta. Și ar fi ceva mai rău dacă nu plouă. În acest caz, aș putea fi supărat fiindcă nu am plecat să mă plimb cu bicicleta. Dar nici una dintre situații nu este la fel de rea ca aceea în care aș fi udat de ploaie până la piele. Așadar, valorile ar putea fi 0 dacă plouă și –1 dacă nu plouă. Acum, pot calcula expectativa de a sta acasă:

$$0{,}1 \times 0 + 0{,}9 \times (-1)$$

Aceasta înseamnă 0,9 și îmi dă informația de care am nevoie, căci voi alege acțiunea care are cea mai ridicată valoare, adică expectativă. În acest caz, plimbarea cu bicicleta are expectativa de 8,5, iar faptul de a sta acasă are valoarea de –0,9. Așadar, voi ieși să mă plimb cu bicicleta.

Astfel, fiind pus să aleg între a și ¬a, voi alege varianta care are expectativa mai mare. (Dacă au valoare egală, aș putea pur și simplu să aleg la întâmplare, să spunem dând cu banul.) În exemplul anterior există doar două posibilități. În general, ar putea fi mai multe (să zicem că aș putea să merg la o plimbare cu bicicleta, să merg la un film sau să rămân acasă). Principiul este însă același: calculez expectativa fiecărei posibilități și aleg posibilitatea cu cea mai ridicată expectativă. Acest tip de raționament constituie un exemplu simplu dintr-o ramură a logicii numită teoria deciziei.

Să revenim acum la Pariul lui Pascal. În acest caz, există două acțiuni posibile: să crezi sau să nu crezi. Și există două posibilități relevante: Dumnezeu există sau nu există. Putem reprezenta informația relevantă sub forma următorului tabel.

	Dumnezeu există	Dumnezeu nu există
Cred (c)	$0{,}1/+10^2$	$0{,}9/-10$
Nu cred (¬c)	$0{,}1/-10^6$	$0{,}9/+10^2$

Cifrele din stânga barei oblice sunt probabilităţile relevante, 0,1 că Dumnezeu există, de pildă, şi 0,9 că Dumnezeu nu există. (Faptul că eu cred sau nu cred nu are nici un efect asupra existenţei lui Dumnezeu, deci probabilităţile sunt aceleaşi pe ambele rânduri.) Cifrele din dreapta barei oblice sunt valorile relevante. Nu mă preocupă prea mult dacă Dumnezeu există sau nu, important este să nu dau greş în convingerile mele; aşadar, valoarea în fiecare dintre aceste cazuri este $+10^2$. (Poate că preferinţele cuiva ar putea să nu fie exact la fel, dar acest lucru nu are o prea mare importanţă, după cum vom vedea.) Să crezi în Dumnezeu, în cazul în care acesta nu există, constituie un inconvenient minor, deci primeşte valoarea –10. Să nu crezi, în cazul în care acesta există, este însă foarte rău, deci primeşte valoarea $–10^6$.

Date fiind aceste valori, putem calcula acum expectativele relevante:

$$E(c) = 0{,}1 \times 10^2 + 0{,}9 \times (–10) \tilde{}– 0$$

$$E(\neg c) = 0{,}1 \times (–10^6) + 0{,}9 \times 10^2 \tilde{}– –10^5$$

(˜– înseamnă „este aproximativ egal cu“.) Voi alege orice acţiune are o expectativă mai mare, adică aceea de a crede în Dumnezeu.

Ai putea crede că valorile precise pe care le-am ales sunt cumva artificiale; şi chiar aşa sunt. Dar de fapt valorile precise chiar nu contează prea mult. Cea importantă este $–10^6$. Acest număr reprezintă ceva cu adevărat rău. (Uneori, un susţinător al teoriei deciziilor ar putea scrie asta ca $–\infty$.) Este ceva atât de rău încât va copleşi toate celelalte cifre, chiar dacă probabilitatea existenţei lui Dumnezeu este foarte scăzută. Aceasta este esenţa Pariului lui Pascal.

Pariul ar putea părea destul de convingător, dar de fapt el conține o eroare teoretic-decizională mai degrabă simplă. El omite unele posibilități relevante. Nu există doar o singură divinitate atotputernică posibilă, ci mai multe: una creștină (Dumnezeu), alta musulmană (Allah), alta hindusă (Brahma) și multe alte divinități pe care unele minorități religioase le venerează. Iar unele dintre aceste divinități sunt foarte geloase. Dacă Dumnezeu există și nu crezi în el, o să ai necazuri; dar dacă Allah există și nu crezi în el o să ai, de asemenea, necazuri; și așa mai departe. Mai mult, dacă Dumnezeu există, dar tu crezi în Allah – sau invers –, atunci e și mai rău pentru tine. Căci, atât în religia creștină, cât și în cea islamică, să crezi în dumnezei falși este și mai grav decât să fii, pur și simplu, necredincios.

Să realizăm deci un tabel cu unele informații mai realiste.

	Nu există Dumnezeu	Dumnezeu există	Allah există	...
Nici o credință (n)	$0,9/+10^2$	$0,01/-10^6$	$0,01/-10^6$	...
Credință în Dumnezeu (d)	$0,9/-10$	$0,01/+10^2$	$0,01/-10^9$	...
Credință în Allah (a)	$0,9/-10$	$0,01/-10^9$	$0,01/+10^2$	...
…	…	…	…	

Dacă vom calcula expectativele chiar şi în cazul acestei cantităţi limitate de informaţii, obţinem:

$E(n) = 0{,}9 \times 10^2 + 0{,}01 \times (-10^6) + 0{,}01 \times (-10^6) = -2 \times 10^4$

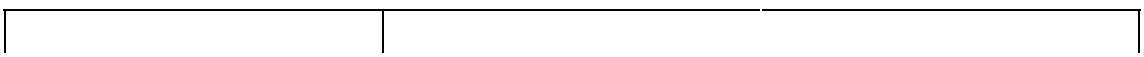
$E(d) = 0{,}9 \times (-10) + 0{,}01 \times 10^2 + 0{,}01 \times (-10^9) = -10^7$

$E(a) = 0{,}9 \times (-10) + 0{,}01 \times (-10^9) + 0{,}01 \times 10^2 = -10^7$

Lucrurile arată destul de sumbru peste tot. Dar este clar că credinţele teiste arată cel mai rău şi n-ar trebui să le mai ai.

Permiteţi-mi să închei, cum am făcut în cazul fiecărui capitol, cu unele raţionamente privitoare la motivele pentru care ar trebui să ne îngrijorăm de cadrul general desfăşurat – anume, în acest caz, politica de a decide în conformitate cu cele mai ridicate expectative. Există situaţii în care acest lucru pare, în mod clar, să dea rezultate greşite.

Să presupunem că faci alegerea greşită în ce priveşte Pariul lui Pascal şi ajungi în iad. După câteva zile, diavolul vine la tine cu o ofertă. Dumnezeu a poruncit să ţi se acorde puţină milă. Aşadar, diavolul a născocit un plan (figura 13). El îţi va da o şansă să ieşi din iad. Poţi da cu banul: cade „cap“, ieşi din iad şi mergi în rai; cade „pajură“, atunci rămâi pentru veşnicie în iad. Dar banul este măsluit şi diavolul îl poate controla. Dacă arunci banul azi, şansa să iasă „cap“ este ½ (adică $1 - ½$). Dacă aştepţi ziua de mâine, şansa urcă la ¾ (adică $1 - 1/2^2$). Rezumi informaţia astfel:



	Scapi	Rămâi în iad
Arunci banul azi (a)	$0,5/+10^6$	$0,5/–10^6$
Arunci banul mâine (m)	$0,75/+10^6$	$0,25/–10^6$

Scăparea din iad are o valoare pozitivă foarte mare; rămânerea in iad are o valore negativă foarte mare. Mai mult, aceste valori sunt aceleaşi astăzi ca şi mâine.

Este adevărat că, dacă aştepţi până mâine, ai putea să petreci o zi în plus în iad, dar o zi este ceva neglijibil în comparaţie cu numărul infinit al zilelor care vor urma. Atunci faci calculele:

$E(a) = 0{,}5 \times 10^6 + 0{,}5 \times (-10^6) = 0$ $E(m) = 0{,}75 \times 10^6 + 0{,}25 \times (-10^6) = 0{,}5 \times 10^6$

Aşadar, decizi să aştepţi până mâine.

13. Un plan diabolic:
nu face azi ce poți amâna până mâine. © John Taylor

Dar mâine, diavolul vine la tine și spune că, dacă mai aștepți încă o zi, șansele vor fi și mai mari: ele vor urca la 7/8 (adică $1 – 1/2^3$). Te las să faci calculele: vei decide singur dacă să aștepți sau nu până mâine. Problema este că diavolul vine la tine în fiecare zi și îți oferă mai multe șanse dacă vei aștepta până a doua zi. Șansele vor fi mai bune, zi după zi, astfel:

$$1 – 1/2, 1 – 1/2^2, 1 – 1/2^3, 1 – 1/2^4 ... , 1 – 1/2n, ...$$

În fiecare zi, faci calcule. Expectativa la aruncarea monedei în ziua n este:

$$(1 – 1/2n) \times 10^6 + 1 – 1/2n \times (–10^6)$$

Puțină aritmetică ne spune că aceasta este echivalentă cu $10^6 \times (1 – 1/2n) = 10^6 \times (1 – 1/2n)$. Expectativa până la următoarea n + 1 zi este aceeași, doar că n este înlocuit de n + 1. Adică $10^6 \times (1 – 1/2n)$ – care este mai mare. (1/2n este mai mică decât $1/2n–^1$.) În fiecare zi, expectativa crește.

Prin urmare, în fiecare zi iei decizia rațională și aștepți până a doua zi. Rezultatul este că nu vei da niciodată cu banul și vei rămâne veșnic în iad! Să dai cu banul în oricare dintre zile trebuie să fie o soluție mai bună decât aceasta. Așadar, se pare că singura decizie rațională de luat este cea irațională!

Ideile principale ale capitolului

- $E(a) = pr(o_1) \times V(o_1) + \ldots + pr(o_n) \times V(o_n)$, unde $o_1, \ldots, o_n$ exprimă toate posibilele rezultate care ar putea decurge dacă *a* este adevărat.

- Acțiunea rațională este aceea cu cea mai mare expectativă.

Capitolul 14. Stai! Ce se petrece aici?

Dacă ai ajuns până la această pagină a cărții înseamnă că ai dobândit o cunoaștere rezonabilă a ideilor de bază ale logicii moderne. Dar acesta este doar începutul. Logica modernă se întinde cu mult dincolo de aceste idei, rezultatele având o imensă profunzime și frumusețe. Desigur, nu avem posibilitatea să explorăm toate acestea într-o carte de asemenea natură, dar acest capitol și cel următor îți vor oferi măcar o privire de ansamblu asupra a ce se află mai departe. Vom urmări câteva rezultate privitoare la ce anume poate și nu poate face raționamentul formal, precum și unele dintre implicațiile filosofice ale acestui fapt. Un avertisment: aceste capitole ar putea fi ceva mai dificile decât cele precedente. Am încercat să simplific cât mai mult lucrurile, dar aici avem de-a face cu unele probleme matematice complexe. Acestea fiind spuse, să intrăm în subiectul acestui capitol.

Leibniz – același Leibniz cu care ne-am întâlnit în capitolele 6 și 9 – a avut un vis, un vis care să pună capăt tuturor disputelor. Ori de câte ori facem o afirmație asupra căreia există controverse, am putea-o transcrie într-un limbaj adecvat, characteristica universalis. Apoi, pentru a determina gradul de adevăr al afirmației, calculemus – pur și simplu calculăm. Limbajul este făcut astfel încât există un proces de calcul, calculus ratiocinator, care poate fi utilizat pentru a stabili dacă afirmația este sau nu adevărată.

Deși Leibniz a sugerat pași în direcția materializării acestui proiect, el a rămas întotdeauna doar un vis. Matematica epocii lui pur și simplu nu era capabilă să abordeze proiectul preconizat de marele filosof.

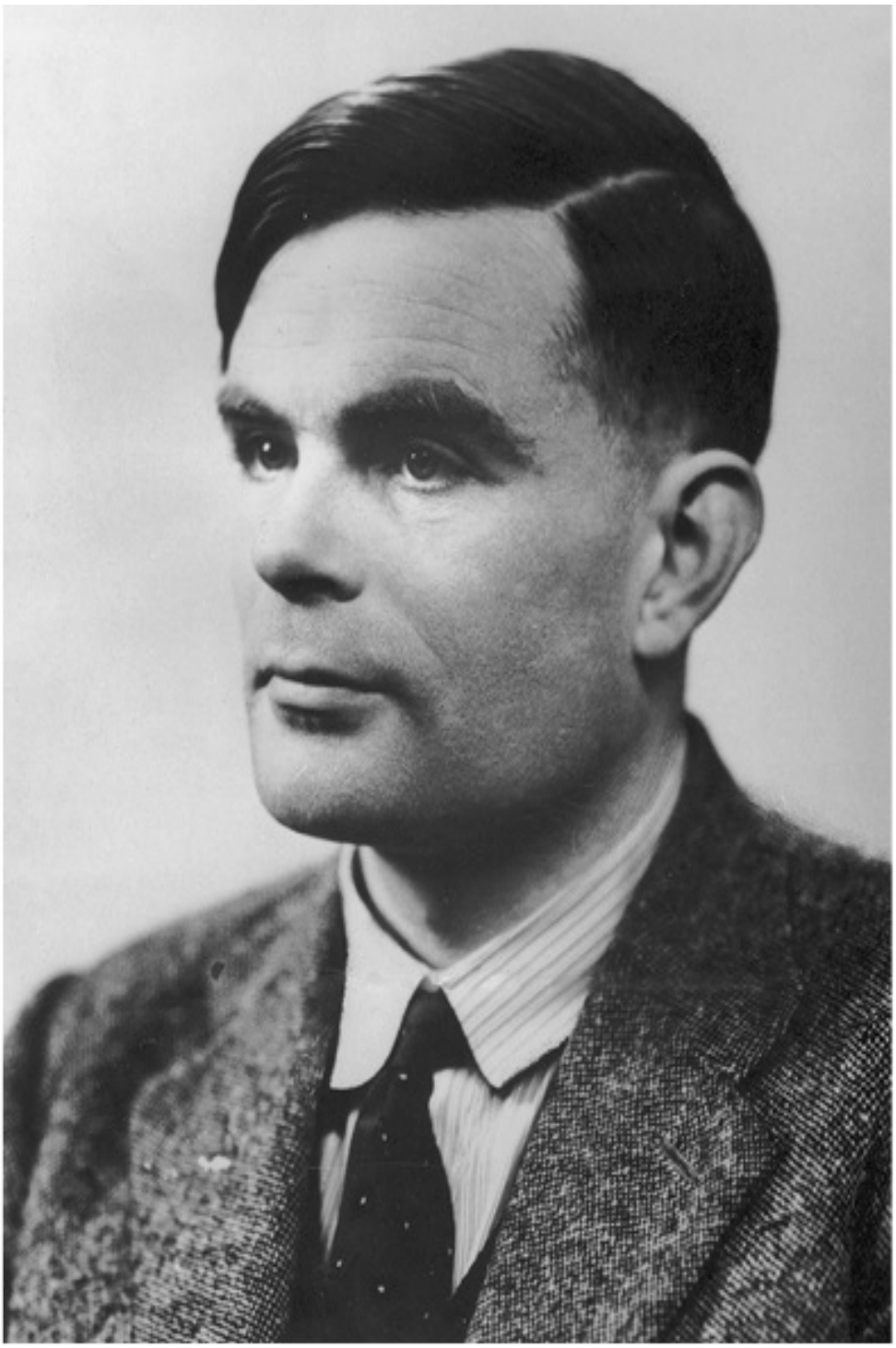
În schimb, matematica zilelor noastre este capabilă să facă asta. Limbajele simbolice pe care le-am urmărit în capitolele precedente sunt de asemenea natură încât pot exprima afirmații (sau cel puțin o mare parte dintre acestea) a căror

valoare de adevăr nu este cunoscută. Întrebarea care rămâne este aşadar dacă există o procedură de calcul adecvată.

Din nefericire, răspunsul este negativ – chiar şi pentru domeniul foarte limitat al presupunerilor matematice. Acest lucru a fost demonstrat de matematicianul britanic Alan Turing (1912–1954) în 1936 (figura 14). Turing este una dintre personalităţile care au întemeiat ştiinţa modernă a computerelor. Desigur, în zilele lui nu existau computerele moderne, astăzi familiare celor mai mulţi dintre oameni. Dar teoria unor astfel de maşini a fost, de fapt, creată de Turing şi de alţii cu mult înainte ca asemenea computere să fi existat, lăsând altora misiunea de a afla cum ar putea fi transpuse ideile în practică – deşi Turing însuşi a făcut unele progrese notabile în aspectele mai practice ale construirii de maşini cibernetice; de exemplu, prin activitatea sa la proiectul Enigma, menit să decodifice transmisiunile radio ale marinei militare germane, în al Doilea Război Mondial. Aşa cum ne-am putea aştepta, conexiunea dintre interesul lui Turing pentru calculatoare şi visul lui Leibniz nu este o coincidenţă.

Ce este un computer? În forma sa cea mai simplă, este un dispozitiv care primeşte o informaţie sau un flux de informaţii, realizează unele proceduri – matematicienii le numesc algoritmi, denumire provenită de la matematicianul persan Al Khwarizmi (780–850) – şi apoi (dacă ai noroc) îţi dă un rezultat.

Informaţiile introduse în computerele moderne, precum şi rezultatele obţinute, sunt de diferite tipuri: numere, texte, imagini, sunete. Dar pentru computer, ele sunt doar numere. Computerele nu pot opera decât cu numere. Dispozitivele computerului traduc fluxul de informaţii într-o secvenţă de numere pe baza cărora operează algoritmul. Dispozitivul de redare a rezultatelor inversează procedura.



14. Alan Turing (1912–1954), unul dintre fondatorii ciberneticii moderne

Photo Researchers, Inc./Alamy Stock Photo

Forma în care sunt stocate numerele folosite de computer nu este însă cea cunoscută din aritmetica de şcoală primară. Celulele de stocare ale computerului se pot afla doar într-una dintre cele două stări: deschis sau închis. Aşadar, computerul poate folosi numai două forme de informaţii de bază. Putem reprezenta aceste două forme prin cifrele 1 şi 0. Orice număr trebuie exprimat folosind doar aceste două cifre. Acest lucru se realizează cu ajutorul aritmeticii binare. (Altfel spus, cum ai putea să numeri dacă ai avea doar două degete.) În aritmetica standard (în bază zecimală), un numeral este de fapt o modalitate de exprimare a sumei de puteri a lui 10. Astfel, numărul 4 302 este:

$$4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

(10^0 – de fapt, orice număr ridicat la puterea 0 – înseamnă 1). Similar, un număr binar reprezintă o sumă de puteri, în acest caz puteri ale lui 2. Aşadar, 1 011 înseamnă:

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Următorul tabel prezintă conversia dintre primele câteva numerale zecimale şi primele câteva numerale binare.

Zecimal	Binar
0 1 2 3 4 5	0 1 10 11 100 101

Prin urmare, am putea considera calculul (algoritmul) nostru drept ceva care operează cu numere exprimate în acest mod binar.

Acestea fiind spuse despre informațiile introduse (input) și rezultatele obținute (output), ce anume este un calcul? Un calcul este specificat printr-un set de reguli de tipul celor întâlnite în programele standard ale computerului. Astfel de programe sunt scrise în multe limbaje diferite, ale căror detalii precise nu sunt relevante aici. Un program mai degrabă banal ar putea arăta în felul următor:

1. dacă x = 0 rezultă x; altfel mergi la rândul 2

2. fie x: = x – 1

3. mergi la rândul 1

Numerele din partea stângă sunt numere de rând. Informațiile introduse sunt un anumit număr x. Primul rând testează dacă acesta este 0, iar dacă este, îl generează. Altfel, trece la următorul rând. Acesta scade 1 din x, apoi calculul revine la rândul 1. Așa cum lesne îți poți da seama, ceea ce face acest program este să ia orice număr introdus și apoi să revină în buclă, scăzând 1 din el până devine 0, pe care apoi îl generează.

Până acum, toate bune și frumoase. Dar apoi – și acest aspect este chiar interesant în privința computerelor moderne – computerul nu trebuie să aștepte ca un om să introducă fiecare rând din program pe măsură ce calculul se derulează. Programul însuși este stocat în computer. Desigur, el este stocat sub forma unui număr. Computerul nu are o altă modalitate de a-l stoca. (De fapt, ne putem gândi la starea totală a computerului, în orice moment dat, ca la un singur șir uriaș de cifre de 1 și 0 – un enorm numeral binar!) Am putea lua numărul

reprezentând programul, stocat în computer, drept „numărul de cod“ al programului. Dacă n este orice număr, fie Pn programul cu acel număr de cod. (Dacă, din cauza modului în care codarea este implementată în computer, n se întâmplă să nu fie numărul de cod al vreunui program, putem lăsa ca Pn să fie simplul program de mai sus, în mod implicit.) Strict vorbind, programului în sine nu îi pasă câte informații introduse ar trebui să aibă algoritmul pe baza căruia funcţionează. El foloseşte orice informaţie aflată în computer când i se spune să facă asta. Însă prin convenţie putem presupune că toate informaţiile introduse sunt setate la 0, cu excepția celor relevante, care sunt completate corespunzător.

Uneori, un program cu anumite informaţii introduse va livra un rezultat; alteori însă, el doar va menține acele informaţii pentru totdeauna. Aşadar, să luăm în considerare următorul program:

1. fie x: = x + 1

2. dacă x = 0 rezultat x; altfel mergi la rândul 1

Programul ia unele informaţii introduse şi le adaugă 1. Apoi testează să vadă dacă există un 0 şi, dacă există, el generează x. Dar desigur nu este 0 (numerele noastre binare sunt întotdeauna mai mari sau egale cu zero), aşadar revenim la rândul 1 şi repetăm procesul. Niciodată nu ajungem la 0 adăugând 1 şi astfel calculul nu încetează niciodată, ci continuă la nesfârşit, într-o buclă nesfârşită (în practică, până când maşina se uzează sau x devine prea mare pentru a mai putea fi gestionat). Să numim acest program, pentru referiri viitoare, L (de la looping – „buclă“).

Programele bine concepute sunt proiectate astfel încât aceasta să nu se întâmple niciodată. Programatorul analizează programul pentru a se asigura că el nu va intra niciodată într-o buclă infinită de acest tip. Dar poate fi făcut acest lucru de fiecare dată? Există un algoritm pe care îl putem aplica unui program (sau, mai precis, numărului său de cod) şi informaţiilor introduse pentru a determina

dacă un calcul folosind acel program şi acele informaţii se termină sau nu?

Răspunsul este negativ, iar Turing a demonstrat tocmai acest lucru. Demonstraţia este relativ simplă, dar foarte ingenioasă. Ea este realizată prin reducere la absurd (reductio ad absurdum). În cadrul unei asemenea demonstraţii, presupunem exact opusul a ceea ce vrem să demonstrăm, apoi dovedim că aceasta duce la ceva inacceptabil.

Să presupunem aşadar că există un algoritm care a făcut ceea ce era necesar. Să numim acest algoritm A. Astfel, când A este aplicat la două informaţii introduse, n şi i, rezultatul va fi 1 sau 0. 1 înseamnă că un calcul al programului Pn cu informaţia introdusă i se termină; 0 înseamnă că nu se termină.

Acum să luăm în considerare următorul algoritm. Să îl numim T (de la Turing):

• Derulează algoritmul A cu informaţiile introduse x şi x. Algoritmul se termină dând fie un 1, fie un 0.

• Dacă este 0, rezultatul este 1.

• Dacă este 1, derulează L cu informaţia introdusă x.

Ce face acest program cu informaţia introdusă x? În esenţă, el aplică A pentru a stabili dacă un calcul al lui Px cu informaţia introdusă x se termină. Dacă nu se termină, rezultatul său este un 1. În anumite cazuri, se opreşte. Dar în cazul în care calculul nu se opreşte, întregul calcul se reia într-o buclă infinită şi nu se

oprește niciodată.

Am descris programul T în termeni de „înalt nivel“. Dar nu există nimic deosebit de problematic legat de acesta. Orice programator priceput care înțelege cum este codată și stocată informația în computer și care folosește un limbaj cu acces direct la aceste date poate scrie un astfel de program.

Să încheiem acum demonstrația: T însuși are un număr de cod – să-l numim t. Putem derula T cu t însuși ca informație introdusă. Dacă se oprește calculul, atunci derularea A cu informațiile introduse t și t se oprește și rezultatul este 1. Dar apoi calculul cu T continuă într-o buclă infinită și nu se oprește niciodată. Dacă, pe de altă parte, derularea lui T cu informația introdusă t nu se oprește, atunci derularea lui A cu informațiile introduse t și t se oprește și rezultatul este 0. Așadar, calculul cu T se oprește și rezultatul este 1. Prin urmare, dacă nu se oprește calculul, el se oprește! În ambele cazuri avem, așadar, o situație imposibilă. Așadar, presupunerea noastră inițială, potrivit căreia există un algoritm A, a fost desigur falsă.

Lucrul deștept în privința demonstrației lui Turing este un anumit tip de autoreferință. (Am făcut cunoștință cu autoreferința în capitolul 5.) Ea pornește de la un program prezumtiv și îl aplică propriului cod. Această tehnică este numită uneori diagonalizare și a fost inventată de marele matematician german Georg Cantor (1845–1918) în investigațiile legate de infinit. Îți poți da seama de ce se numește astfel luând în considerare următorul tabel:

	0 1 2 3 4 ...
0 1 2 3 4 ...	a00 a01 a02 a03 a04 … a10 a11 a12 a13 a14 … a20 a21 a22 a23 a2

În josul părții din stânga sunt codurile programelor, iar în partea de sus sunt informațiile introduse. Intrarea axy este rezultatul pentru programul (cu cod) x când derulăm cu informația introdusă y. Dacă acel calcul nu se termină, am putea indica asta prin simbolul ∞. Ceea ce face algoritmul A – dacă ar fi să existe – este să calculeze dacă valoarea lui axy este ∞ sau nu. T ia rezultatul acestui calcul pe diagonală (cu bold) și operează cu el pentru a asigura că T se comportă diferit față de Px cu informația introdusă x. Astfel, T nu poate să se afle în partea stângă a listei. Și deoarece T a fost definit fără probleme din algoritmul A, nici A nu poate exista.

Rezultatul se numește teorema opririi. El ne arată că nici un algoritm nu poate stabili dacă un anumit program, cu orice informație introdusă dată, se oprește (deși, desigur, am putea face asta în cazuri speciale). Și – pentru a ne întoarce, în sfârșit, la visul lui Leibniz – ceea ce vedem este că există probleme matematice, precum aceasta, pentru care nu există algoritmi care să le determine adevărul. Visul lui Leibniz nu poate fi realizat.

Am încheiat capitolele precedente arătând de ce firul logic urmat în capitolul respectiv ar putea fi contestat. Permiteți-mi să închei astfel și capitolul de față. Date fiind presupozițiile standard ale teoriei numerelor, este imposibil să contești demonstrația lui Turing. Aceasta este o demonstrație matematică foarte bună. Dar în argumentația pe care am oferit-o există o presupoziție pe care până acum am făcut-o fără comentarii. Presupoziția este că tot ce putem recunoaște drept - algoritm poate fi programat pe un computer. Dacă nu este așa, atunci demonstrația lui Turing arată doar că nu există vreun program de computer care poate determina dacă vreun calcul se oprește. Dar ar putea exista un alt fel de algoritm – poate unul care ar putea fi derulat în proiectul lui Leibniz.

Presupunerea că se poate scrie un program pentru fiecare algoritm se numește teza Church–Turing, după numele lui Turing și cel al matematicianului american Alonzo Church (1903–1995). Aceasta nu este în sine susceptibilă de vreo

demonstrație matematică, de vreme ce demonstrația poate funcționa doar pe baza unor noțiuni precis definite; și, deși noțiunea a ceea ce poate face un computer ar putea fi definită în termeni matematici preciși, noțiunea de algoritm este doar una informală și intuitivă. Un algoritm este, în mare, o procedură care poate fi realizată în pași și în care nu există prezumții și nici creativitate – și acestea sunt cumva noțiuni vagi.

De multă vreme teza Church–Turing a fost bine primită de matematicieni. Există însă și o istorie întreagă de tentative de a o respinge. Toate acestea au încercat să producă ceva care poate fi recunoscut, intuitiv, ca algoritmic, dar care nu poate fi programat pe un computer – o chestiune care este susceptibilă de o demonstrație matematică precisă. Asemenea tentative au eșuat, de unde și acceptarea tezei Church–Turing ca fiind corectă.

Însă există astăzi domenii de cercetare în metodele de calcul cibernetic diferite de cele folosite de un computer clasic. Acestea sunt numite uneori hipercalcule (hipercomputație). Un exemplu: unele dintre ideile implicate folosesc cantități analoge, opuse celor digitale. (Cantitățile analoge sunt continue, ca lungimi, în vreme ce cantitățile digitale sunt discrete, ca numere binare.) Un alt exemplu: unele metode implicate fac apel la proprietățile spațiului și timpului din teoria generală a relativității, unde timpul poate fi „accelerat“. Deocamdată însă este prea devreme să stabilim clar care vor fi roadele unor asemenea investigații.

Ideile principale ale capitolului

- Algoritmilor li se pot atribui numere de cod.
- Dacă există un algoritm *A* care să determine dacă un algoritm cu numărul de cod *x* (adică P_x), terminat când derulăm o informație introdusă *y*, am putea folosi acest lucru pentru a defini un algoritm *T*, care calculează valoarea lui *A* cu informațiile introduse *x* și *x*, și folosește rezultatul pentru a garanta că propriul rezultat este diferit de fiecare P_x „de-a lungul diagonalei".
- *T* trebuie să aibă el însuși un număr de cod *t*. Derularea lui *T* cu informația introdusă *t* ar produce așadar un rezultat imposibil.
- Prin urmare, nu există un asemenea algoritm ca *T* și nici un asemenea algoritm ca *A*.

Capitolul 15. Poate este adevărat – dar nu poți dovedi asta!

Titlul acestui capitol sună mai degrabă ca o replică pe care un infractor mărunt i-ar putea-o adresa unui polițist. Dar, de fapt, el anunță unul dintre cele mai semnificative progrese realizate de logică în ultimii 100 de ani. (Un avertisment rapid: în capitolele precedente am folosit pentru propoziții minuscule [a, b etc.]. În acest capitol voi folosi majuscule [A, B etc.] pentru a evita orice confuzii posibile cu numere.)

Leibniz nu a fost singurul logician din istoria acestui domeniu care a avut un proiect ambițios. Un altul a fost unul dintre cei mai importanți matematicieni din secolul XX, David Hilbert (1862–1943), care a trăit și a lucrat la Göttingen. Proiectul lui, numit de obicei Programul lui Hilbert asupra fundamentelor matematicii, avea să demonstreze că matematica este un domeniu coerent, adică să arate că în matematică nimeni nu poate dovedi vreodată lucruri de forma A și ¬A. În anii 1920, matematica era încă în stare de șoc din cauza descoperirii paradoxului lui Russell (cu care am făcut cunoștință în capitolul 5) și a altor lucruri similare: argumente paradoxale care loveau în însuși nucleul matematicii. Hilbert a vrut să se asigure că așa ceva nu avea să se mai întâmple niciodată.

Trebuie să fim însă atenți pe aceste nisipuri mișcătoare. Dovada coerenței va fi, desigur, una matematică. Iar dacă matematica este incoerentă, probabil și-ar putea demonstra coerența oricum. De fapt, dacă logica implicată este cea pe care am examinat-o în capitolul 2, dacă matematica este incoerentă, ea poate demonstra totul! Așa cum am văzut acolo, în logica respectivă totul derivă dintr-o contradicție. Așadar, dovada coerenței trebuia făcută printr-un raționament matematic extrem de sigur, pe care Hilbert l-a numit finitar; dar nu el reprezintă partea relevantă a poveștii noastre.

Partea relevantă este următoarea. Pentru a demonstra că un lucru este coerent, trebuie să clarifici mai înainte acel lucru. Și dacă vei aplica metode matematice în privința lui, va trebui să ai o specificație precisă. Așadar, ca pas preliminar către proiectul său principal, Hilbert a avut nevoie de un sistem de axiome corespunzătoare pentru matematică, a căror coerență să o demonstreze apoi.

Un sistem de axiome este compus dintr-un mănunchi de axiome. Acestea sunt afirmații pe care le putem accepta fără a mai fi nevoie de demonstrarea lor. (Setul de axiome poate fi finit sau infinit. Dar dacă este infinit, trebuie să putem afirma că ceva este o axiomă. În mod specific, ar trebui să existe un algoritm care determină chestiunea.) O demonstrație în sistem este doar o succesiune de afirmații, fiecare dintre acestea putând fi o axiomă sau putând fi dedusă din afirmații anterioare din cadrul succesiunii. Teoremele sistemului sunt lucruri care apar la finalul demonstrațiilor. Așadar, teoremele sunt lucruri care pot fi deduse, în ultimă instanță, din axiome.

Metoda axiomatizării este una cu o existență venerabilă în domeniul matematicii. Ea a fost aplicată la geometrie de matematicianul antic grec Euclid (mijlocul secolului al IV-lea – mijlocul secolului al III-lea î.Hr.). Dar, poate surprinzător, metoda nu a fost aplicată pe scară largă în matematică decât începând cu secolul XX. Până atunci, singurele părți din matematică formulate axiomatic fuseseră geometria (sau, mai bine spus, geometriile; la începutul secolului al XIX-lea, matematicienii știau că există și alte geometrii în afara celei euclidiene – geometrii non-euclidiene) și unele părți ale algebrei abstracte.

Propunerea ambițioasă a lui Hilbert necesita axiomatizarea întregii matematici. Cu alte cuvinte, era necesar un sistem de axiome ale căror teoreme să fie doar - afirmații matematice adevărate (orice ar fi înțeles cineva prin „adevărat“ în matematică). Existența unui asemenea sistem de axiome a fost respinsă de poate cel mai faimos logician al secolului XX, matematicianul austriac Kurt Gödel (1906–1978; figura 15). Gödel a demonstrat că un asemenea sistem de axiome nu poate fi oferit nici măcar pentru acea parte a matematicii care vizează numerele naturale (0, 1, 2...), cu atât mai puțin pentru restul domeniului. Partea

respectivă a matematicii se numește de obicei aritmetică. Așadar, Gödel a arătat că, deși ar putea exista unele sisteme de axiome care să capteze anumite adevăruri matematice, nu există un sistem de axiome care să le cuprindă pe toate. După cum spun logicienii, sistemul de axiome trebuie să fie incomplet.

Date fiind lucrurile pe care le-am învățat din capitolul 14, rezultatul lui Gödel poate fi expus destul de clar. Demonstrația este, din nou, prin reducere la absurd. Să luăm de pildă un limbaj simbolic care poate vorbi despre numere și care are resursele necesare pentru a exprima lucrurile care se pot face cu acestea: adunare, înmulțire etc. Nu este dificil să producem un asemenea lucru. Afirmația că un calcul cu program (cu cod) n și informația introdusă i se termină poate fi exprimată printr-o afirmație în acest limbaj. (Este nevoie de ceva efort pentru a demonstra asta, dar nu este extrem de dificil.) Să numim această afirmație Ani. Acum să presupunem că ar exista o axiomatizare completă a aritmeticii, adică un sistem de axiome ale căror teoreme ar fi toate doar adevăruri ale acestui limbaj. Atunci există un algoritm care să decidă dacă Ani este adevărată. Începem, pur și simplu, să demonstrăm teoremele în mod sistematic, asigurându-ne că tot ce poate fi demonstrat este demonstrat, mai devreme sau mai târziu. (Nu este dificil de realizat o asemenea procedură.) Mai devreme sau mai târziu așadar, va apărea o demonstrație fie a Ani, fie a ¬Ani care să tranșeze problema. (E posibil să nu știm cât va dura, dar nici nu contează.) Dar teorema opririi din capitolul 14 ne spune că nu poate exista un algoritm pentru a tranșa problema. Prin urmare, nu poate exista o asemenea axiomatizare.

Demonstrația pe care tocmai am subliniat-o nu i-a aparținut lui Gödel. De fapt, demonstrația lui a apărut în 1931, cu cinci ani înainte ca Turing să demonstreze teorema opririi. Însă demonstrația lui Gödel a fost la fel de ingenioasă ca a lui Turing – dacă nu chiar mai ingenioasă – și a implicat, de asemenea, un anumit tip de autoreferință. În mare, ea arată în felul următor.

15. Kurt Gödel (1906–1978),
probabil cel mai faimos logician al secolului XX
Pictorial Press Ltd/Alamy Stock Photo

Să presupunem că avem un sistem de axiome pentru aritmetică într-un limbaj cu o capacitate suficient de expresivă. Toate aceste teoreme sunt adevărate, dar s-ar putea să fie imposibil să se demonstreze toate afirmaţiile adevărate ale limbajului; aşadar, limbajul s-ar putea să nu fie complet. O afirmaţie matematică a acestui limbaj este doar o bucată de text şi, aşa cum am remarcat în capitolul 14, o asemenea afirmaţie poate fi codată printr-un număr. Un program de computer este o succesiune de afirmaţii şi, aşa cum am remarcat în capitolul 14, şi aceasta poate fi codată ca un număr. Dar şi o demonstraţie matematică este doar o succesiune de afirmaţii şi astfel poate fi codată ca un număr în acelaşi mod.

Să examinăm acum afirmaţia: x este (codul) unei demonstraţii a afirmaţiei (cu cod) y. Aceasta este în sine o afirmaţie despre numere şi poate fi exprimată în limbaj verbal printr-o propoziţie Dem(x, y). Mai mult, dacă axiomele sistemului sunt suficient de puternice:

• dacă m este într-adevăr (codul) unei demonstraţii a teoremei (cu cod) n, Dem(m, n) poate fi demonstrată în sistemul de axiome.

Să evidenţiem aceste lucruri este de fapt destul de greu şi necesită o matematică mult mai substanţială. Dar aşa ceva poate fi făcut, aşa cum a arătat Gödel.

A spune că afirmaţia (cu cod) y este demonstrabilă este similar cu a spune că există o demonstraţie a ei: ∃xDem(x, y). Dar – şi aici vine partea cu adevărat interesantă a demonstraţiei lui Gödel – printr-o construcţie ingenioasă se poate găsi o propoziţie în esenţă de forma ¬∃xDem(x, n), al cărei număr de cod este n însuşi! În concluzie, afirmaţia spune: însăşi această afirmaţie nu este demonstrabilă (în sistem)! Să numim această propoziţie G (de la Gödel).

Acum, să presupunem că G, adică ¬∃xDem(x, n) a fost demonstrabilă în sistemul de axiome. Atunci un număr oarecare, m, va fi codul unei demonstraţii a lui G. Aşadar, Dem(m, n) va fi adevărată şi astfel demonstrabilă în sistemul de axiome (vezi fraza cu bulină de mai sus). Dar ¬∃xDem(x, n) derivă din aceasta, fiind aşadar demonstrabilă. Prin urmare, sistemul de axiome este inconsistent. Presupunând că acesta nu este cazul, atunci G nu poate fi demonstrată. Dar în acest caz ea este adevărată, deoarece chiar asta spune! Prin urmare, există adevăruri în limbaj care nu pot fi demonstrate în sistem. În concluzie, nu există un sistem de axiome complet în aritmetică.

Teorema lui Gödel – deşi este demonstrată – relevă o limitare clară a metodei axiomatice în matematică (desigur, aceasta nu înseamnă că n-ar trebui folosită: de fapt, axiomatizarea este astăzi mai mult ca oricând un element de bază al metodologiei matematice). În particular, ea a dat o lovitură mortală Programului lui Hilbert. Aritmetica nu poate fi axiomatizată – şi cu atât mai puţin toată matematica. S-a considerat că rezultatul lui Gödel are numeroase alte consecinţe filosofice privind natura numerelor, cunoaşterea acestora de către oameni şi chiar natura minţii umane. Dezbaterile continuă şi azi, dar nu este momentul să intrăm acum în detalii.

Permiteţi-mi să închei, încă o dată, ridicând o problemă legată de teoremă. Matematica ambelor demonstraţii pe care le-am oferit este incontestabilă. Dar ambele demonstraţii fac o anumită presupoziţie (despre care Hilbert a considerat cu certitudine – sau cel puţin a sperat! – că este potrivită): aceea că adevărurile despre numere şi, ca atare, un sistem de axiome care conţine orice parte a acestora sunt coerente. Acest lucru este destul de explicit în demonstraţia lui Gödel, dar este prezent şi în prima demonstraţie pe care am oferit-o. Acea demonstraţie presupune că exact una dintre Ani şi ¬Ani se va evidenţia, tranşând problema într-un fel sau altul. Dar dacă sistemul este incoerent, acest lucru s-ar putea să nu se întâmple: ambele se pot evidenţia, lăsând problema cel puţin discutabilă!

Aşa cum poate este clar pentru cititori, propoziţia G implicată în demonstraţia lui

Gödel se înrudeşte foarte mult cu paradoxul mincinosului, cu care ne-am întâlnit în capitolul 5. Ambele spun despre o anumită propoziţie că nu are, în sine, nici o proprietate crucială. De fapt, este un paradox legat de demonstrabilitate, strâns înrudit cu paradoxul mincinosului. Să luăm în considerare propoziţia: această propoziţie nu este demonstrabilă. Să presupunem că ea este demonstrabilă. Aşadar, este adevărată. Deci nu este demonstrabilă. Ca atare (prin reducere la absurd, reductio ad absurdum) ea nu poate fi demonstrabilă. Dar tocmai am demonstrat asta, deci este demonstrabilă!

Dacă cineva încearcă raţionamente de acest tip privitoare la propoziţia G în sistemul său de axiome, ea nu poate fi reprodusă în sistemul de axiome. Poate mai degrabă surprinzător, dacă sistemul este coerent, afirmaţia că dacă un lucru este demonstrabil în sistem, atunci el este şi adevărat nu poate fi demonstrată în sistem. (Acest lucru a fost demonstrat de matematicianul german Martin Löb [1921–2006] în 1955 şi este numit de obicei Teorema lui Löb.) Aşadar, paradoxul nu poate fi folosit pentru a determina incoerenţa sistemului axiomelor, dar arată că paradoxurile autoreferinţei apar în vecinătatea aritmeticii. Dat fiind acest lucru, poate nu ar trebui să fim atât de convinşi că adevărul despre numere este coerent.

Ideile principale ale capitolului

- Un sistem de axiome pentru aritmetică este complet dacă poate demonstra fiecare propoziție adevărată în limbajul său.
- Nici un sistem de axiome dintr-un limbaj cu o putere suficient de expresivă nu este complet.
- Acest lucru poate fi dedus din Teorema opririi.
- De asemenea poate fi demonstrat luând în considerare o propoziție care spune, de fapt, *însăși această propoziție nu este demonstrabilă (în sistem)*.

Final la cealaltă teoremă a incompletitudinii a lui Gödel

Rezultatul pe care l-am aflat în acest capitol este numit uneori prima teoremă a incompletitudinii a lui Gödel. În acelaşi timp în care a demonstrat-o, Gödel a demonstrat un alt rezultat, numit a doua teoremă a incompletitudinii. Aceasta arată, în esenţă, că, dacă avem un sistem de axiome coerent, de tipul celui examinat, el nu poate demonstra o propoziţie considerată în mod natural ca exprimând coerenţa sistemului – cel puţin dacă sistemul este bazat pe logica observată de noi în capitolul 2. De fapt, este destul de uşor să demonstrăm asta, dată fiind Teorema lui Löb.

Mai înainte de toate, să remarcăm că, de vreme ce sistemul poate demonstra că ¬0 = 1, dacă el poate demonstra că 0 = 1 înseamnă că este incoerent. La fel, dacă este inconsistent, el poate demonstra că 0 = 1, din cauza inferenţei a cărei concluzie se află în contradicţie cu premisa, pe care am notat-o în capitolul 2. Prin urmare, un mod simplu de a spune că sistemul este coerent este să afirmăm că el nu poate demonstra că 0 = 1.

Dacă A este orice propoziţie a limbajului teoriei, să scriem ⟨A⟩ pentru numărul său de cod. Aşadar, o expunere ceva mai precisă a Teoriei lui Löb este aceasta:

• Dacă sistemul poate demonstra propoziţia $\exists x Dem(x, \langle A \rangle) \supset A$, el poate demonstra propoziţia A.

Acesta înseamnă că:

• Dacă un sistem nu poate demonstra propoziția A, el nu poate demonstra propoziția $\exists x Dem(x, \langle A \rangle) \supset A$

Deci, ca un caz special, dacă el nu poate demonstra că 0 = 1, el nu poate demonstra că:

• $\exists x Dem(x, \langle 0 = 1 \rangle) \supset 0 = 1$

Cu alte cuvinte, dacă este coerent, el nu poate demonstra că $\exists x Dem(x, \langle 0 = 1 \rangle) \supset 0 = 1$.

Dar atunci nu poate demonstra nici că $\neg \exists x Dem(x, \langle 0 = 1 \rangle)$, deoarece oricare ar fi C, $A \supset C$ decurge din $\neg A$ (așa cum demonstrează tabelul de adevăr pentru $\supset$ din capitolul 7: dacă A este fals, $A \supset C$ este adevărat). Așadar, dacă sistemul este coerent, el nu poate demonstra că $\neg \exists x Dem(x, \langle 0 = 1 \rangle)$, adică faptul că el este coerent. Aceasta este a doua teoremă a incompletitudinii a lui Gödel.

Această teorie a dat o nouă lovitură Programului lui Hilbert. Scopul programului a fost, să nu uităm, mai întâi de a axiomatiza matematica; apoi, în al doilea rând, de a demonstra că sistemul de axiome este coerent. Desigur, demonstrația ar fi fost una matematică și deci realizabilă în sistemul însuși. Prima teoremă a incompletitudinii a demonstrat că primul pas al programului nu putea fi realizat, iar a doua teoremă a incompletitudinii a arătat că nu putea fi realizat nici al doilea.

Puțină istorie și lecturi suplimentare

Ideile pe care le-am examinat în această carte au fost dezvoltate în diferite locuri și epoci istorice. În acest capitol voi descrie istoria logicii și voi plasa ideile în contextul lor istoric. Mai întâi, voi trasa pe scurt istoria logicii, în general; apoi voi parcurge din nou ideile din fiecare capitol și voi explica în ce mod detaliile se încadrează în imaginea de ansamblu.

Pe măsură ce vom înainta, îți voi recomanda și alte cărți de citit, în care poți urmări o serie de probleme, dacă dorești. Acest lucru nu este așa de ușor cum ar putea părea. În general, logicienii, filosofii și matematicienii preferă să scrie pentru ei, într-un limbaj de specialitate. Să găsești lucruri scrise pentru începători în domeniu nu este ușor, dar mi-am dat toată silința.

În istoria intelectuală occidentală au existat trei mari perioade de dezvoltare a logicii, întrerupte de perioade oarecum „sterpe“. Prima mare perioadă a fost cea din Grecia antică, între circa 400 î.Hr. și 200 î.Hr. Cea mai influentă personalitate a epocii a fost Aristotel (384–322 î.Hr.), cu care am făcut cunoștință în capitolul 6. Aristotel a dezvoltat o teorie sistematică a inferențelor, numite „silogisme“, care au forma:

Toate [unele] A-urile sunt [nu sunt] B-uri.

Toate [unele] B-urile sunt [nu sunt] C-uri.

Așadar, toate [unele] A-urile sunt [nu sunt] C-uri.

Aristotel a trăit cea mai mare parte a vieții la Atena, a întemeiat o școală de

filosofie numită Lyceum și este considerat fondatorul logicii occidentale. Dar aproape în aceeași epocă a existat o altă școală înfloritoare de logică la Megara, la circa 50 km sud-vest de Atena. Se cunosc mai puține lucruri despre logicienii megarici, dar ei par să fi fost interesați îndeosebi de condiționale și de paradoxuri logice. Eubulide (cu care ne-am întâlnit în capitolele 5 și 10) a fost un megaric. O altă mișcare filosofică importantă a apărut la Atena pe la 300 î.Hr. Ea s-a numit stoicism, după porticul (în limba greacă stoa) unde se desfășurau primele întruniri. Deși preocupările filosofice ale stoicilor depășeau cu mult domeniul logicii, aceasta a constituit o parte importantă a activității lor. În general se presupune că logica megarică a exercitat o influență asupra logicienilor stoici. În orice caz, o preocupare majoră a logicienilor stoici a fost investigarea comportamentului negației, conjuncției, disjuncției și condiționalei.

Ar trebui menționat și că în aproximativ aceeași perioadă în care aceste lucruri se întâmplau în Grecia, teorii logice erau dezvoltate în India. Dar, oricât de importante ar fi fost acestea, ele nu au atins nivelurile sofisticate la care logica s-a dezvoltat în Occident.

A doua perioadă de dezvoltare a logicii occidentale are loc la începutul Evului Mediu, prin filosofi arabi ca Ibn Rushd (Averoes, 1126–1198), dar înflorește în universitățile medievale europene, precum cele din Paris și Oxford, din secolul al XII-lea până în secolul al XIV-lea. Printre logicienii medievali s-au numărat învățați de renume, precum Duns Scotus (1266–1308) și William de Ockham (1285–1349), care au sistematizat și au dezvoltat considerabil logica moștenită din Grecia antică. După această perioadă, logica a stagnat, în mare parte, până în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, singura pată luminoasă de la orizont fiind, în această perioadă, Leibniz (1646–1716), cu care ne-am întâlnit în capitolele 6, 9 și 14. Leibniz a anticipat unele dintre evoluțiile moderne ale logicii, dar matematica din zilele lui nu a permis ideilor sale să prindă contur.

Dezvoltarea algebrei abstracte în secolul al XIX-lea a oferit logicii imboldul de care avea nevoie și a declanșat cea de-a treia – și posibil cea mai grandioasă – perioadă a sa. Idei logice absolut novatoare au fost dezvoltate de gânditori

precum Frege (1848–1925) și Russell (1872–1970), cu care ne-am întâlnit în capitolele 2, respectiv 4. Teoriile logice ivite din această activitate sunt numite îndeobște logică modernă, prin contrast cu logica tradițională, care le-a precedat. Evoluțiile în logică au continuat să se manifeste pe parcursul secolului XX și nu sunt semne că s-ar opri.

O istorie standard a logicii este cea realizată de Kneale și Kneale (1975). Aceasta este puțin desuetă astăzi, fiind caracterizată de mai mult optimism decât ar fi cazul, prin atitudinea că primii logicieni moderni ar fi înțeles corect toate aspectele abordate; dar rămâne o excelentă lucrare de referință. Lucrarea lui Zalta (1995) poate fi consultată pentru multe articole de referință asupra subiectelor tratate în această carte, deși unele au tendința de a fi destul de tehnice.

* * *

Capitolul 1: Validitate

Distincția dintre validitatea deductivă și cea inductivă datează din perioada lui Aristotel. Teoriile validității deductive au fost articulate încă de atunci. Viziunea descrisă în capitolul 1 – potrivit căreia o inferență este deductiv validă doar dacă are o concluzie adevărată în orice situație unde premisele sunt adevărate – își are originea în logica medievală, dar articularea sa constituie o parte a logicii moderne. Un avertisment: ceea ce eu am numit situație este numit mai comun interpretare, structură sau uneori model. Termenul „situație“ are un sens diferit și tehnic într-o anumită sferă a logicii. Lewis Carroll (al cărui nume adevărat era Charles Dodgson) nu a fost nici pe departe un logician, dar a publicat o serie de lucrări despre logica tradițională.

Capitolul 2: Funcții de adevăr – sau nu?

Argumentul potrivit căruia contradicţiile implică totul reprezintă o invenţie medievală. Cine anume l-a inventat nu este clar, dar cu certitudine el este întâlnit la Scotus. Înțelegerea verifuncțională a negației, conjuncției și disjuncției în sine pare să fi apărut în Evul Mediu. (Abordarea stoică nu era verifuncțională în sens modern.) În forma sa pe deplin articulată, ea apare la fondatorii logicii moderne, Frege și Russell. Un disident modern este Strawson (1952, capitolul 3).

Capitolul 3: Nume și cuantori

Distincţia dintre nume şi cuantori este în general o creaţie a logicii moderne. Într-adevăr, analiza cuantorilor este adesea recunoscută drept un moment definitoriu al logicii moderne. Ea a fost realizată de Frege şi preluată apoi de Russell. Cam în aceeași perioadă, filosoful şi logicianul american C.S. Peirce a dezvoltat idei similare. ∃x este adesea numit cuantor existenţial; dar această terminologie se strecoară într-o oarecum controversată teorie a existenței. Cărţile cu Alice scrise de Lewis Carroll sunt pline de glume filosofice. Pentru un excelent comentariu asupra lor, vezi Heath (1974). Pentru multe dintre propriile glume ale lui Heath despre nimic, vezi Heath (1967).

Teoriile explicate în capitolele 1–3 pot fi întâlnite în orice text standard de logică modernă. Hodges (1977) este unul dintre logicienii care nu sunt cotați la un nivel formidabil; la fel și Lemmon (1971). Tehnicile logicii deductive întâlnite în capitolele următoare sunt descrise mai pe larg în Priest (2008), deși această lucrare presupune mai întâi frecventarea unui curs de logică.

Capitolul 4: Descrieri și existență

Izolarea descrierilor, ca o importantă categorie logică, se întâlnește doar în logica modernă. Poate cea mai faimoasă analiză a lor a fost realizată de Russell în 1905. Abordarea oferită în acest capitol nu îi aparține lui Russell, dar este foarte apropiată, în spirit, de a sa. Descrierile sunt discutate în unele texte standard de logică modernă. Hodges (1977) oferă o explicație foarte clară.

Capitolul 5: Autoreferință

Diferite versiuni ale paradoxului mincinosului pot fi întâlnite în filosofia antică greacă. Numeroase paradoxuri ale autoreferinței au fost inventate și discutate în logica medievală, dar și mai multe au fost descoperite la începutul secolului XX – și de astă dată în chiar nucleul matematicii. De atunci, ele au devenit un subiect foarte important al logicii. Sugestiile pentru rezolvarea lor sunt nenumărate. Ideea că ar putea să existe unele propoziții care nu sunt nici adevărate, nici false coboară în timp până la Aristotel (De Interpretatione, cap. 9); dar el probabil nu a avut nici o simpatie față de ideea simetrică potrivit căreia unele propoziții ar putea fi simultan adevărate și false. Că ar putea exista asemenea propoziții și că propozițiile paradoxale s-ar putea număra printre ele este o viziune neortodoxă, avansată de unii logicieni în ultimele patru decenii. Discuțiile despre paradoxurile autoreferinței tind să devină foarte repede extrem de tehnice. Discuții introductive utile pot fi întâlnite la Read (1994, cap. 6) și Sainsbury (1995, cap. 5 și 6). Întregul subiect rămâne însă deosebit de controversat.

Capitolul 6: Necesitate și posibilitate

Studiul inferențelor implicând operatori modali datează încă din epoca lui Aristotel și a continuat în Evul Mediu. Investigațiile moderne au fost începute de

filosoful american C.I. Lewis, aproximativ între 1915 şi 1930. Noţiunea unei lumi posibile se poate întâlni la Leibniz, dar modul în care este aplicată în acest capitol se datorează mai ales unui alt filosof american, Saul Kripke, care şi-a enunţat ideile în anii 1960. O introducere standard în subiect se poate găsi la Hughes şi Cresswell (1996), dar este puţin probabil că vei înţelege prea mult din această lucrare dacă nu stăpâneşti noţiunile dintr-un manual introductiv de logică. Argumentul lui Aristotel privind fatalismul provine din De Interpretatione, cap. 9. El îl considera falacios, deşi nu pentru motivele expuse în acest capitol. O discuţie rezonabil de accesibilă a problemei poate fi găsită la Haack (1974, cap. 3). Argumentul cu care capitolul se încheie este o versiune a „argumentului principal“ avansat de logicianul Diodorus Cronus din Megara.

Capitolul 7: Operatori condiționali

Dezbaterile legate de natura condiţionalelor datează din epoca megaricilor şi stoicilor, care au produs o serie de teorii diferite în această privinţă. Subiectul a fost, de asemenea, discutat pe larg în Evul Mediu. Ideea potrivit căreia condiţionala este verifuncţională reprezintă una dintre viziunile megarice. Ea a fost susţinută la începuturile logicii moderne de Frege şi Russell. Abordarea oferită în acest capitol poate fi întâlnită în logica medievală; în forma sa modernă, ea se datorează lui C.I. Lewis, care a dezvoltat logica modală pornind de aici. Noţiunea de implicatură conversaţională datează din anii 1970 şi se datorează filosofului britanic Paul Grice (deşi el a folosit-o în apărarea condiţionalei materiale). Natura condiţionalelor rămâne extrem de controversată. Cartea lui Read (1994, cap. 3) este o introducere uşor de citit, ca şi partea I din Sanford (1989).

Capitolul 8: Viitorul și trecutul

Raţionamentul temporal este discutat de o serie de logicieni medievali.

Abordarea descrisă în acest capitol a fost inventată în special de logicianul neozeelandez Arthur Prior în anii 1960, el fiind inspirat de evoluţiile din logica modală. O abordare uşor de citit a subiectului poate fi găsită la Øhrstrøm şi Hasle (1995). Argumentul lui McTaggart a apărut iniţial în 1908, deşi prezentarea lui este întru câtva diferită de a mea. Prezentarea mea urmează lucrarea lui Mellor (1981, cap. 7).

Capitolul 9: Identitate şi schimbare

Confuzia dintre este al identităţii şi este al predicaţiei este frecventă în istoria filosofiei. Deşi distincţia este trasată de Abelard (1079–1142) şi de Leibniz (care a enunţat „Legea lui Leibniz“), ea nu a devenit cu adevărat bine înţeleasă până la finele secolului al XIX-lea. Există prezentări în majoritatea textelor standard de logică modernă, precum Lemmon (1971) şi Hodges (1977). În filosofie există numeroase probleme logice legate de identitate. Cea cu care se încheie capitolul i se datorează, din câte ştiu, lui Prior.

Capitolul 10: Vaguitate

Problemele soriţilor îşi au originea în logica megarică. Problema cu care se deschide capitolul este o versiune a celei numite „Corabia lui Tezeu“, o navă care fusese, aparent, reconstruită scândură cu scândură. Exemplul este folosit mai întâi de Plutarh în Viaţa lui Tezeu şi a fost preluat apoi de Thomas Hobbes, în prima secţiune a tratatului Elemente de filosofie, intitulată De Corpore. Investigarea intensă a problemelor de acest gen a reprezentat, în mare, o trăsătură a ultimelor cinci decenii. Detaliile logice descrise în acest capitol au fost dezvoltate iniţial de logicianul polonez Jan Łukasiewicz în anii 1920, aproape independent de preocupările privind vaguitatea. (El a fost motivat iniţial de argumentul lui Aristotel despre fatalism.) Discuţii utile despre vaguitate pot fi întâlnite la Read (1994, cap. 7) şi Sainsbury (1995, cap. 2). O introducere mult

mai vastă apare în Williamson (1994).

Capitolul 11: Probabilitate

Din punct de vedere istoric, validitatea inductivă este destul de subdezvoltată, în comparație cu validitatea deductivă. Teoria probabilității a fost dezvoltată în secolul al XVIII-lea, în legătură cu jocurile de noroc, în principal de matematicieni francofoni ca Pierre de Laplace şi membri ai prestigioasei familii Bernoulli. Ideea aplicării sale în inferența inductivă se datorează în special logicianului german Rudolf Carnap, în anii 1950. Există multe noțiuni referitoare la probabilitate. Cea descrisă în acest capitol este de obicei numită interpretarea frecvenței. O introducere utilă în întregul domeniu apare la Skyrms (1975).

Capitolul 12: Probabilitate inversă

Investigațiile conexiunii dintre probabilitățile inverse datează încă din secolul al XVIII-lea, ele aparținând matematicianului britanic Thomas Bayes. Conexiunea descrisă în acest capitol este adesea numită (incorect) Teorema lui Bayes. Problemele privitoare la principiul indiferenței sunt, de asemenea, contemporane cu originile teoriei probabilității. O introducere standard în raționamentul de acest gen se găsește la Howson și Urbach (1989), dar aceasta nu este o lucrare pentru cei care se tem de matematică.

Capitolul 13: Teoria deciziei

Teoria deciziei își are rădăcinile în investigațiile privind teoria probabilității din

secolul al XVIII-lea, dar a devenit o chestiune serioasă în secolul XX, când i-au fost găsite numeroase aplicații importante în economie și teoria jocurilor. O bună introducere este lucrarea lui Jeffrey (1985), deși această carte nu este nici ea recomandată celor care se tem de matematică. Problema cu care se încheie capitolul provine din Gracely (1988).

O serie de subiecte cu care ne-am confruntat în această carte îl privesc, într-un fel sau altul, pe Dumnezeu. Aceasta nu din cauză că Dumnezeu reprezintă un subiect logic particular. Doar că filosofii au adus de multă vreme argumente interesante referitoare la Dumnezeu. În capitolul 3 am făcut cunoștință cu argumentul cosmologic. Poate cea mai faimoasă versiune a acestuia a fost propusă de filosoful medieval Toma d'Aquino. (Versiunea lui este mult mai sofisticată decât argumentul din capitolul 3 și nu are de suferit din cauza problemei evidențiate acolo.) Argumentul ontologic privind existența lui Dumnezeu a fost propus de filosoful medieval Anselm de Canterbury. Versiunea dată în capitolul 4 se datorează în mare parte filosofului francez din secolul al XVII-lea René Descartes, fiind prezentată în Meditații despre filosofia primă (A cincea meditație). Versiuni biologice ale argumentului teleologic au fost populare în secolul al XIX-lea, dar au fost distruse de teoria evoluției. Versiunile cosmologice, de tipul celor date în capitolul 12, au devenit foarte populare în secolul XX. O bună lucrare de referință asupra argumentelor pentru existența lui Dumnezeu îi aparține lui Hick (1964).

Capitolul 14: Stai! Ce se petrece aici?

Teoria calculelor a fost pusă la punct de logicieni și de matematicieni precum Alan Turing, Alonzo Church și John von Neumann, în prima jumătate a secolului XX, cu mult înainte de apariția computerelor cu care suntem obișnuiți astăzi. Ea a inclus demonstrația Teoremei opririi, avansată de Turing, și formularea tezei Church–Turing. Pentru o discuție generală despre acestea, vezi Copeland (2004). Noțiunea de hipercalcul este de dată mult mai recentă. Pentru unele discuții, vezi Piccini (2015). Despre viața și opera lui Turing, vezi

Hodges (2013).

Capitolul 15: Poate este adevărat – dar nu poți dovedi asta!

Programul lui Hilbert a fost una dintre cele câteva idei propuse în prima parte a secolului XX pentru a oferi matematicii o temelie sigură. Pentru o discuție despre program, vezi Zach (2015). Pentru o introducere mult mai tehnică în teoremele lui Gödel (deşi nu atât de tehnică precum sunt aceste lucruri), vezi Smith (2007). Teoremele incompletitudinii ale lui Gödel sunt, probabil, cele mai spectaculoase rezultate ale sale; dar el a dovedit şi alte câteva rezultate foarte importante care stau la baza logicii şi a teoriei seturilor. Pentru o discuție despre acestea și despre Gödel însuşi, vezi Dawson (1997). Teoremele lui Gödel au fost considerate (justificat sau nu) a avea multe consecințe filosofice. Pentru o discuție asupra unora dintre aceste consecințe, vezi Raatikainen (2005).

* * *

Există, desigur, mult mai multe lucruri despre istoria logicii decât ne arată detaliile expuse mai sus. De asemenea, există multe lucruri despre logica în sine pe care nu le-am abordat absolut deloc în această carte. N-am făcut altceva decât să plutim la suprafața acestei materii profunde. Capitolele 14 și 15 ar putea oferi cititorului o oarecare impresie despre ce se află dincolo de materialul de bază expus în carte; dar acesta nu este mai mult decât un gest. Logica este, fără îndoială, un subiect tehnic, însă rădăcinile pădurii sale de idei și de rezultate tehnice pătrund adânc în solul filosofiei. Marii logicieni din trecut au fost, firește, preocupați de pădure, dar majoritatea au făcut asta din cauza implicărilor lor pe tărâm filosofic. Dacă am reușit să arăt cititorului câteva dintre aceste implicări în capitolele cărții de față, mă declar mulțumit.

Glosar

Următorul glosar conține termeni tehnici și simboluri logice prezente în această carte. Intrările nu sunt menite a fi definiții precise, ci doar să transmită ideea principală, pentru o consultare rapidă. Pe alocuri, termenii și simbolurile sunt în general standard, deși există alte câteva seturi de simboluri care există și în uzul curent.

A doua teoremă a incompletitudinii a lui Gödel: dată fiind o axiomatizare corespunzător de expresivă a aritmeticii, dacă ea este coerentă, coerența sa nu poate fi dovedită în sistem.

algoritm: procedură care poate fi efectuată în pași succesivi care nu implică presupuneri sau creativitate.

antecedent: ceea ce urmează după „dacă“ într-o propoziție condițională.

aritmetică: ramură a matematicii care implică numerele naturale (0,1, 2,...).

autoreferință: propoziție sau altă construcție care se reflectă asupra ei înseși.

axiomă: afirmație de bază a unui sistem de axiome.

clasă de referință: grup de obiecte din care sunt calculate ratele de probabilitate.

coerență: un sistem de axiome este coerent dacă nu există o formulă A astfel încât să poată demonstra atât A, cât și ¬A.

completitudine: un sistem de axiome este complet dacă poate demonstra fiecare propoziție adevărată exprimabilă în limbajul său (și astfel, dat fiind principiul terțului exclus, fie A sau ¬A pentru orice A).

concluzie: parte a unei inferențe pentru care se dau argumente.

condiții de adevăr: propoziții care reflectă în ce mod valoarea sau de valorile de adevăr ale unei propoziții depind de valorile de adevăr ale componentelor sale.

condițională: dacă... atunci...

condițională materială: nu ambele (... și nu...).

conjuncție: ... și...

consecvent: ceea ce urmează după „prin urmare“ într-o condițională.

cuantor: cuvânt sau o expresie care poate fi subiectul unei propoziţii, dar care nu se referă la un obiect (unii..., toţi..., nici un...).

cuantor particular: ceva este astfel încât...

cuantor universal: totul este astfel încât...

demonstraţie: deducţie într-un sistem de axiome.

descriere (definită): denumire de forma „lucrul cu cutare şi cutare proprietăţi“.

disjuncţie: sau...

„este“ de identitate: ... este acelaşi obiect ca...

„este“ de predicaţie: parte a predicatului care indică aplicarea unei proprietăţi exprimate de restul acestuia.

expectativă: rezultat al luării în calcul a fiecărui rezultat posibil, înmulţindu-i valoarea cu probabilitatea sa şi adunând toate rezultatele.

funcţie de adevăr: simbol logic care, când este aplicat unei propoziţii pentru a genera o propoziţie mai complexă, este astfel încât valoarea de adevăr a

compusului este complet determinată de valoarea sau de valorile de adevăr ale componentului sau componenților săi.

implicatură conversațională: inferență, nu din ceea ce s-a spus, ci din faptul că s-a spus.

inferență: raționament în care premisele sunt oferite ca argumente pentru o concluzie.

Legea lui Leibniz: dacă două obiecte sunt identice, orice proprietate a unuia este și proprietate a celuilalt.

logică modernă: tehnici și teorii ale logicii apărute în urma revoluției din logică, pe la începutul secolului XX.

logică tradițională: tehnici și teorii logice utilizate înainte de secolul XX.

logică vagă (fuzzy): tip de logică în care propozițiile primesc valori de adevăr care pot fi orice număr între 0 și 1.

lume posibilă: situație asociată cu o alta, s, unde lucrurile sunt de fapt așa cum ar putea fi pur și simplu în s.

modus ponens: formă a inferenței a, a → c/c.

necesitate: trebuie să se întâmple ca...

negație: nu se întâmplă ca...

număr de cod: număr care poate fi atribuit unei entități, precum o afirmație, un program de computer sau o demonstrație. Având numărul de cod, poți „decoda“ pentru a afla lucrul căruia îi aparține codul.

nume: categorie gramaticală pentru un cuvânt care se referă la un obiect (dacă totul merge bine).

nume propriu: nume care nu este o descriere.

numeral binar: numeral precum 10 011, care exprimă un număr în termeni de puteri ale lui 2.

operator temporal: sintagmă atașată unei propoziții, pentru a forma o altă propoziție ce exprimă când prima propoziție este adevărată sau falsă (în trecut sau în viitor).

operanzi conjunctivi: cele două propoziții implicate într-o condițională.

operanzi disjunctivi: cele două propoziții implicate într-o disjuncție.

operator modal: sintagmă atașată unei propoziții pentru a forma o altă propoziție ce exprimă modul în care prima propoziție este adevărată sau falsă (posibil, necesar etc).

Paradoxul lui Russell: vizează setul tuturor seturilor care nu sunt membre ale lor însele.

paradoxul mincinosului: „Această propoziție este falsă“.

paradoxul soriților: tip de paradox ce implică utilizări repetate ale unui predicat vag.

posibilitate: s-ar putea întâmpla ca...

predicat: pentru cel mai simplu tip de propoziție din punct de vedere gramatical, parte care exprimă orice este spus despre subiectul propoziției.

premisă: parte a inferenței care oferă argumentele.

Prima teoremă a incompletitudinii a lui Gödel: dată fiind o axiomatizare corespunzător de expresivă a aritmeticii, ea este fie incoerentă, fie incompletă.

Principiul indiferenței: dat fiind un număr de posibilități, fără nici o diferență relevantă între ele, toate au aceeași probabilitate.

principiul terțului exclus: principiu potrivit căruia $A \vee \neg A$ pentru orice A.

probabilitate: număr între 0 și 1 ce măsoară cât este de posibil să se întâmple un anumit lucru.

probabilitate anterioară: probabilitate a unei afirmații înainte de a fi luată în calcul orice dovadă.

probabilitate condițională: probabilitate a unei anumite afirmații, dată fiind altă informație.

probabilitate inversă: relație dintre probabilitatea condițională a unui a, dat fiind b, și a unui b, dat fiind a.

Programul lui Hilbert: program al axiomatizării întregii matematici și apoi al demonstrării coerenței sistemului de axiome.

reducere la absurd: metodă de demonstrație în care cineva presupune negația a ceea ce vrea să demonstreze și arată că este imposibilă.

silogism: formă de inferență cu două premise și o concluzie, teorie propusă prima oară de Aristotel.

sistem de axiome: colecție de afirmații de bază din care altele pot fi demonstrate prin deducție.

situație: stare de fapt, poate ipotetică, în care premisele și concluziile ar putea fi adevărate sau false.

subiect: pentru cel mai simplu tip de propoziție din punct de vedere gramatical, parte care îți spune despre cine este vorba în propoziție.

tabel de adevăr: diagramă ce reprezintă condițiile de adevăr.

Teorema lui Löb: dat fiind un sistem de axiome suficient de expresive pentru aritmetică, dacă el poate demonstra că $\exists x Dem(x, \langle A \rangle) \supset A$*, el poate demonstra A.*

Teorema opririi: rezultat stabilit de Turing că nu există un program de computer care va stabili dacă un program arbitrar, cu o informație introdusă arbitrar, se va opri.

teoremă: afirmație care poate fi demonstrată în cadrul unui sistem de axiome.

teorie a deciziilor: teorie despre cum să iei decizii în condiţii de informaţie incertă.

teza Church–Turing: teză potrivit căreia fiecare algoritm poate fi practicat de un program de computer.

timp: trecut, prezent și viitor.

vaguitate: proprietate a unui predicat care exprimă ideea că micile schimbări ale unui obiect nu fac vreo diferenţă în privința aplicabilității predicatului.

valid: se aplică unei inferenţe în care premisele oferă cu adevărat un motiv pentru un tip de concluzie.

validitate deductivă: o inferență este validă deductiv când premisele nu pot fi adevărate fără ca și concluzia să fie adevărată.

validitate inductivă: o inferență este validă inductiv când premisele oferă un temei rațional pentru concluzie, deși nu neapărat unul concludent.

valoare de adevăr: adevărat (A) sau fals (F).

SIMBOL	SEMNIFICAȚIE	NUME
A	adevărat (într-o situație)	valori de adevăr
F	fals (într-o situație)	
$\vee$	sau...	disjuncție
$\&$	... și...	conjuncție
$\neg$	nu se întâmplă ca...	negație
$\exists x$	un obiect x este astfel încât...	cuantor particular
$\forall x$	orice obiect x este astfel încât...	cuantor universal
ιx	obiectul x, astfel încât...	operator de descriere
$\Box$	trebuie să se întâmple ca...	operatori modali
$\Diamond$	s-ar putea întâmpla ca...	
$\rightarrow$	dacă... atunci...	condițională

SIMBOL	SEMNIFICAȚIE	NUME
A	adevărat (într-o situație)	valori de adevăr
F	fals (într-o situație)	
$\vee$	sau...	disjuncție
$\&$	... și...	conjuncție
$\neg$	nu se întâmplă ca...	negație
$\exists x$	un obiect x este astfel încât...	cuantor particular
$\forall x$	orice obiect x este astfel încât...	cuantor universal
ιx	obiectul x, astfel încât...	operator de descriere
$\Box$	trebuie să se întâmple ca...	operatori modali
$\Diamond$	s-ar putea întâmpla ca...	
$\rightarrow$	dacă... atunci...	condițională

SIMBOL	SEMNIFICAȚIE	NUME
$\supset$	nu ambii (... și nici...)	condițională materială
T	s-a întâmplat ca...	operatori temporali
V	se va întâmpla ca...	
S	s-a întâmplat întotdeauna ca...	
U	urmează să se întâmple întotdeauna ca...	
$=$	... este același obiect ca...	identitate
$<$	... este mai mic decât	
$\leq$	... este mai mic decât sau egal cu...	

Probleme

Pentru fiecare dintre principalele capitole ale cărții, următoarele rânduri propun un exercițiu prin care poți verifica dacă ai înțeles conținutul capitolului respectiv. Soluțiile problemelor pot fi găsite în capitolul imediat următor.

Capitolul 1 Următoarea inferență este validă deductiv, validă inductiv sau nici una, nici cealaltă? De ce? José este spaniol; majoritatea spaniolilor sunt catolici; deci José este catolic.

Capitolul 2 Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea. Fie Jones este un ticălos, fie este un prost; dar cu siguranță este un ticălos; prin urmare, nu este un prost.

Capitolul 3 Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea. Cineva fie a fost martor la împușcătură, fie a auzit-o; prin urmare, fie a fost cineva martor la împușcătură, fie a auzit-o.

Capitolul 4 Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea. Toți au dorit să câștige premiul; prin urmare, persoana care a câștigat cursa a dorit să câștige premiul.

Capitolul 5 Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea. Ai făcut o omletă, dar nu poți face omletă fără să spargi ouă; prin urmare, ai spart ouă.

Capitolul 6 Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea. Este imposibil ca porcii să zboare și este imposibil ca porcii să respire sub apă; prin urmare trebuie să se întâmple ca porcii să nu poată nici zbura, nici respira sub apă.

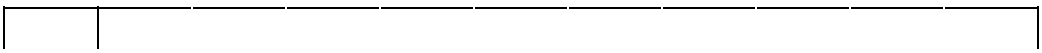
Capitolul 7 Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea. Dacă crezi în Dumnezeu, atunci mergi la biserică; dar tu mergi la biserică; prin urmare, crezi în Dumnezeu.

Capitolul 8 Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea. A plouat întotdeauna și va ploua întotdeauna; prin urmare, acum plouă.

Capitolul 9 Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea. Pat este o femeie, iar persoana care a șters geamurile nu este o femeie; prin urmare, Pat nu este persoana care a șters geamurile.

Capitolul 10 Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea, unde nivelul de acceptabilitate este 0,5. Jenny este inteligentă; și fie Jenny nu este inteligentă, fie ea este frumoasă; prin urmare, Jenny este frumoasă.

Capitolul 11 Următorul set de statistici a fost colectat de la zece oameni (numiți 1–10).



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
înalt	P		P		P				P	
bogat	P		P		P		P	P		
fericit	P	P		P	P			P	P	

Dacă r este o persoană aleasă întâmplător din acest grup, estimează validitatea inductivă a următoarei inferențe: r este înalt și bogat, deci r este fericit.

Capitolul 12 Să presupunem că există două boli, A și B, care au exact aceleași simptome observabile. 90% din cei care prezintă simptome au boala A, iar ceilalți 10% au boala B. Să presupunem, de asemenea, că există o analiză patologică pentru diferențierea între A și B. Testul oferă răspunsuri corecte în nouă din zece cazuri.

1. Care este probabilitatea ca testul, când este aplicat unei persoane alese întâmplător, manifestând simptomele, să indice că aceasta are boala B? (Indiciu: ia în considerare un eșantion tipic de 100 de persoane cu simptomele respective și stabilește despre câte dintre ele testul va arăta că au boala B.)

2. Care este probabilitatea ca o persoană cu simptomele respective să aibă boala B, dat fiind că testele arată că o au? (Indiciu: trebuie să folosești prima întrebare.)

Capitolul 13 Închiriezi o mașină. Dacă nu îți faci asigurare și ai un accident, reparația te va costa 1 500 de dolari. Dacă îți faci asigurare și ai un accident, reparația te va costa 300 de dolari. Asigurarea costă 90 de dolari și estimezi că probabilitatea unui accident este de 0,05%. Presupunând că singurele considerații sunt cele financiare, ar trebui să îți faci asigurare?

Capitolul 14 Ce este greșit în privința următorului argument? Desigur, există un argument pentru a stabili dacă un program cu o anumită informație introdusă se termină. Derulăm, pur și simplu, programul cu informația respectivă și vedem ce se întâmplă. Programul fie se va termina,

fie nu. În orice caz, vei avea un rezultat.

Capitolul 15 Să spunem că un sistem de axiome are proprietatea de disjuncţie doar dacă cineva poate demonstra oricând ceva de forma A ∨ B, cineva poate demonstra fie A, fie B (sau ambele). Să presupunem că avem un sistem de axiome coerent pentru aritmetică, ale cărui teoreme sunt toate adevărate şi a cărui logică este cea din capitolul 2. Poate avea el proprietatea de disjuncţie? (Indiciu: foloseşte faptul că în această logică principiul terţului exclus este valid – adică logica poate demonstra orice de forma A ∨ ¬ A. Apoi foloseşte propoziţia G a lui Gödel.)

Soluțiile problemelor

Iată soluțiile problemelor din capitolul anterior. În multe cazuri, mai ales acolo unde inferența este nevalidă, soluțiile nu sunt unice: sunt posibile și alte soluții, la fel de corecte.

Capitolul 1

Următoarea inferență este validă deductiv, validă inductiv sau nici una, nici cealaltă? De ce?

José este spaniol; majoritatea spaniolilor sunt catolici; deci José este catolic.

Inferența nu este validă deductiv. Este foarte posibil ca premisele să fie adevărate și totuși José să fie unul dintre acei spanioli minoritari care nu sunt catolici. Cu toate acestea, totalitatea premiselor oferă motive întemeiate (deși nu decisive) pentru a presupune că și concluzia este adevărată. Prin urmare, inferența este validă inductiv.

Capitolul 2

Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea. Fie Jones este un ticălos, fie este un prost; dar cu siguranță este un ticălos; prin urmare, nu este un prost.

Avem:

fie t „Jones este un ticălos“.

Fie p „Jones este un prost“.

Atunci, inferența este:

$$t \vee p \; \neg t$$

$$\neg p$$

Testând, obținem:

t	p		t ∨ p	t	¬p
A A F F	A F A F		A A A F	A A F F	F A F A

Pe primul rând, ambele premise sunt A, iar concluzia este F. Prin urmare, inferența este nevalidă.

Capitolul 3

Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea.

Cineva fie a fost martor la împușcătură, fie a auzit-o; prin urmare, fie a fost cineva martor la împușcătură, fie a auzit-o.

Avem:

fie xM „x a fost martor la împușcătură“.

fie xA „x a auzit împușcătura“.

Și fie obiectele în chestiune oameni. Atunci, inferența este:

$$\exists x\ (xM \vee xA)$$

$$\exists x\ xM \vee \exists x\ xA$$

Inferența este validă. Căci să presupunem că premisele sunt adevărate într-o

situație. Atunci trebuie să existe un obiect x în domeniul acelei situații, astfel încât xM ∨ xA. Conform condițiilor de adevăr pentru ∨, fie xM, fie xA. În primul caz, ∃x xM; în al doilea, ∃x xA. În ambele cazuri, ∃x xM ∨ ∃x xA este adevărată în această situație.

Capitolul 4

Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea.

Toți au dorit să câștige premiul; prin urmare, persoana care a câștigat cursa a dorit să câștige premiul.

Avem:

fie xP „x a dorit să câștige premiul“.

fie xC „x a câștigat cursa“.

Și fie obiectele în chestiune oameni. Atunci inferența este:

∀x xP

(ιx xC) P

Inferența este nevalidă. Să luăm o situație s în care toți satisfac P, dar în care

nimeni nu satisface C. (Poate cursa a fost amânată!) Atunci, premisa este adevărată în s. Dar descrierea ιx xC nu se referă la nimic. Prin urmare, concluzia este falsă în s.

Capitolul 5

Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea.

Ai făcut o omletă, dar nu poți face omletă fără să spargi ouă; prin urmare, ai spart ouă.

Avem:

fie f „Ai făcut o omletă“.

fie s „Ai spart ouă“.

Atunci inferența este:

$$f \neg(f \,\&\, \neg s)$$

$$s$$

Această inferență este nevalidă. Căci să luăm următoarea situație:

s: F, dar nu A

f: A și F

Atunci ¬s este A (și nu F); deci f & ¬s este A și F (ambele conjuncții sunt adevărate și una este falsă); prin urmare ¬(f & ¬s) este A și F. În această situație, ambele premise sunt A și concluzia nu este.

Capitolul 6

Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea.

Este imposibil ca porcii să zboare și este imposibil ca porcii să respire sub apă; prin urmare trebuie să se întâmple ca porcii să nu poată nici zbura, nici respira sub apă.

Avem:

fie z „Porcii zboară“.

fie r „Porcii respiră sub apă“.

Atunci, inferența este:

¬◊z & ¬◊r

¨(¬z & ¬r)

Această inferenţă este validă. Căci să presupunem că premisa este adevărată într-o situaţie s. Atunci ambele conjuncţii sunt adevărate în acea situaţie. Prin urmare, nu există o situaţie asociată s’ unde fie z este adevărată (primul operand conjunctiv), fie r este adevărată (al doilea operand conjunctiv). Adică, în fiecare situaţie asociată s’, ¬z & r este adevărată. Prin urmare, concluzia este adevărată în s.

Capitolul 7

Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea.

Dacă crezi în Dumnezeu, atunci mergi la biserică; dar tu mergi la biserică; prin urmare, crezi în Dumnezeu.

Avem:

fie c „Crezi în Dumnezeu“.

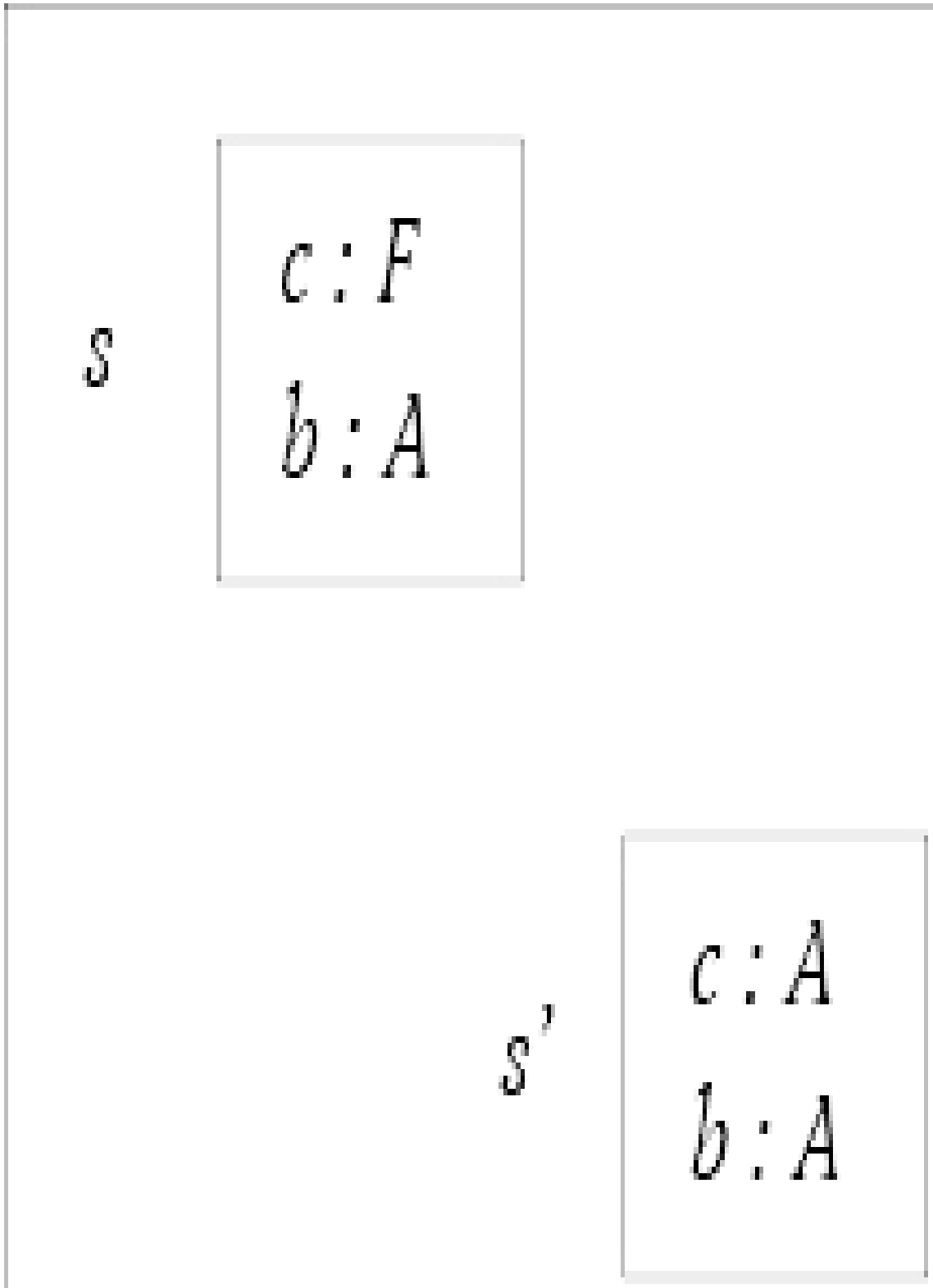
fie b „Mergi la biserică“.

Atunci inferența este:

$$c \rightarrow b\ b$$

$$c$$

Această inferență este nevalidă. Să luăm în considerare o situație s, cu o situație asociată s’, unde lucrurile sunt așa cum sunt prezentate în următoarea diagramă:


s
c : F
b : A
s'
c : A
b : A

În fiecare situație unde c este adevărat, la fel este și b. Prin urmare, c → b este adevărată în s. Astfel, ambele premise sunt adevărate în s, dar concluzia nu este.

Capitolul 8

Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea.

A plouat întotdeauna și va ploua întotdeauna; prin urmare, acum plouă.

Avem:

fie p „Plouă“.

Atunci inferența este:

Sp & Up

p

Această inferență este nevalidă. Căci să presupunem că lucrurile sunt așa cum sunt prezentate în următoarea mulțime de situații:

... s–3 s–2 s–1 s0 s1 s2 s3...

p p p ¬p p p p

p este adevărată în toate momentele anterioare lui s0; deci Sp este adevărat în s0. p este adevărată în toate momentele după s0; deci Up este adevărată în s0. Prin urmare, Sp&Up este adevărată în s0, dar concluzia nu este adevărată în s0.

Capitolul 9

Notează cu simboluri inferența următoare și evaluează-i validitatea.

Pat este o femeie, iar persoana care a șters geamurile nu este o femeie; prin urmare, Pat nu este persoana care a șters geamurile.

Avem:

fie p „Pat“.

fie ș „persoana care a șters geamurile“.

fie f „este o femeie“.

Atunci inferența este:

pf & ¬șf

¬p = ș

Această inferenţă este validă. Să luăm fiecare situaţie unde premisa este adevărată. Atunci, în acea situaţie, oricare ar fi numele la care se referă p, el are proprietatea exprimată de f şi oricare ar fi numele la care se referă ș nu o are. Prin urmare, potrivit Legii lui Leibniz, p şi ș denotă lucruri diferite (presupunând că nimic nu poate fi atât adevărat, cât şi fals!). Adică ¬p = ș este adevărată.

Capitolul 10

Notează cu simboluri inferenţa următoare şi evaluează-i validitatea, unde nivelul de acceptabilitate este 0,5.

Jenny este inteligentă; şi fie Jenny nu este inteligentă, fie ea este frumoasă; prin urmare, Jenny este frumoasă.

Avem:

fie i „Jenny este inteligentă“.

fie f „Jenny este frumoasă“.

Atunci inferenţa este:

$$i \neg i \vee f$$

$$f$$

Această inferenţă este nevalidă. Să luăm o situaţie în care valorile de adevăr ale lui i şi f sunt după cum urmează:

i: 0,5

f: 0,2

Atunci valoarea de adevăr a lui ¬i în această situaţie este 0,5 (1–0,5), şi astfel valoarea de adevăr a lui $\neg i \vee f$ este tot 0,5 (Max (0,5, 0,2)). Dar atunci ambele premise sunt acceptabile (≥ 0,5) şi concluzia nu este.

Capitolul 11

Următorul set de statistici a fost colectat de la zece oameni (numiţi 1–10).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
înalt	P		P		P				P	
bogat	P		P		P		P	P		
fericit	P	P		P	P			P	P	

Dacă r este o persoană aleasă întâmplător din acest grup, estimează validitatea inductivă a următoarei inferențe: r este înalt și bogat, deci r este fericit.

Avem:

fie î „r este înalt“.

fie b „r este bogat“.

fie f „r este fericit“.

Inferența este validă. Căci există trei oameni care sunt înalți și bogați, și doi dintre ei sunt fericiți. Prin urmare, pr(f | î & b) = 2/3. Unul dintre ei este nefericit, prin urmare pr(¬f | î & b) = 1/3. Prin urmare, pr(f | î & b) > pr(¬f | î & b).

Capitolul 12

Să presupunem că există două boli, A și B, care au exact aceleași simptome observabile. 90% din cei care prezintă simptome au boala A, iar ceilalți 10% au boala B. Să presupunem, de asemenea, că există o analiză patologică pentru diferențierea între A și B. Testul oferă răspunsuri corecte în nouă din zece cazuri.

1. Care este probabilitatea ca testul, când este aplicat unei persoane alese întâmplător, manifestând simptomele, să indice că aceasta are boala B? (Indiciu: ia în considerare un eșantion tipic de 100 de persoane cu simptomele respective și stabilește despre câte dintre ele testul va arăta că au boala B.)

2. Care este probabilitatea ca o persoană cu simptomele respective să aibă boala B, dat fiind că testele arată că o are? (Indiciu: trebuie să folosești prima întrebare.)

Pentru partea 1: să luăm în considerare un eșantion tipic de 100 de persoane cu simptome: 90 vor avea boala A și 10 vor avea boala B. Deoarece testul dă rezultate corecte în 9 cazuri din 10, el va spune că 81 din 90 au boala A (90 x 9/10) și 9 persoane din 90 au boala B. Dintre cele 10 persoane cu boala B, testul va arăta că 9 au boala B și 1 are boala A. Prin urmare se va putea spune că un total de 18 persoane au B, deci probabilitatea de a se dovedi că o persoană (aleasă la întâmplare) are boala B este 18/100.

Pentru partea a 2-a: fie î o persoană aleasă la întâmplare cu simptome și:

fie b „î are boala B“.

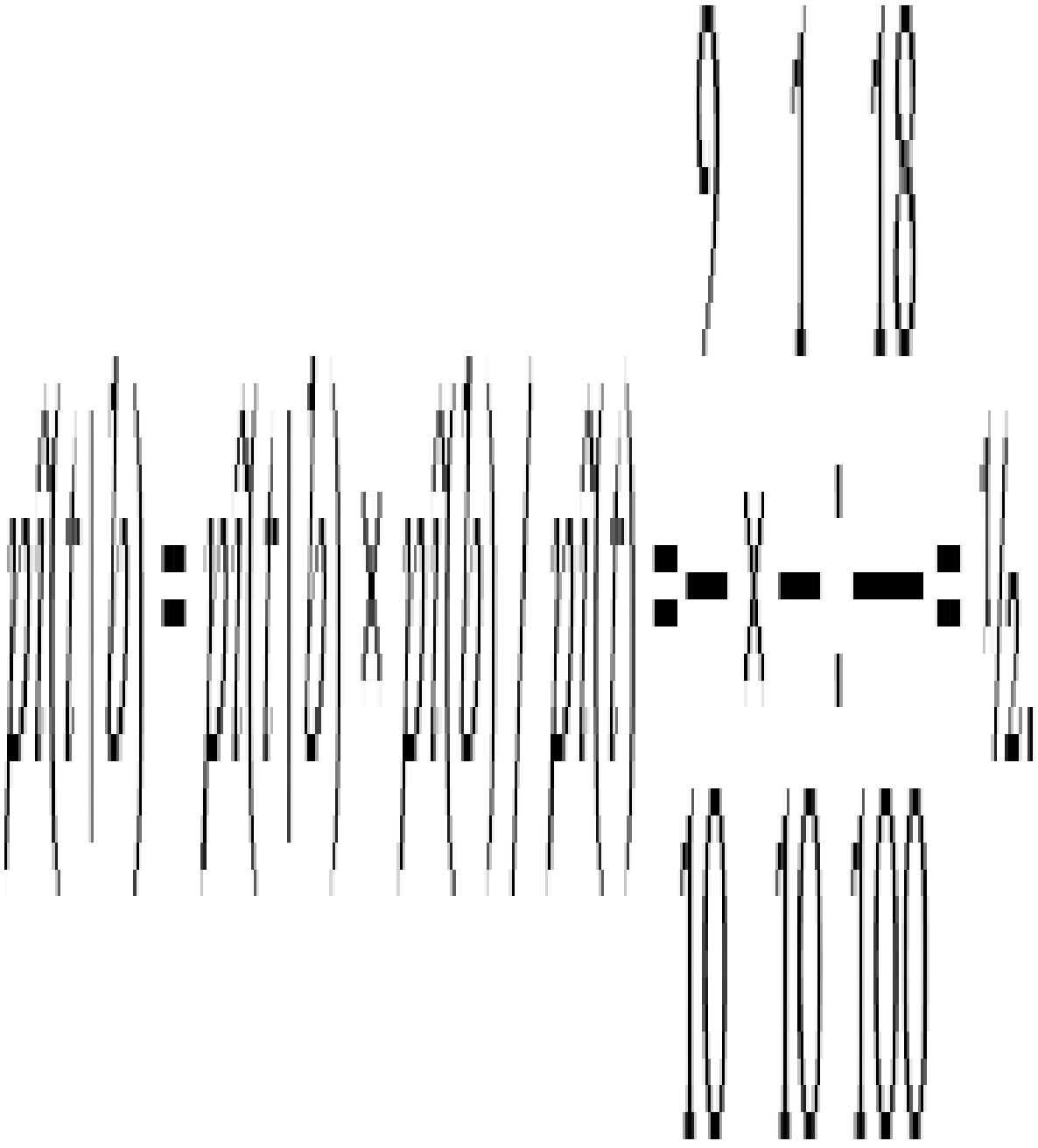
fie t „Testul arată că î are boala B“.

Atunci:

pî(t|b) = 9/10, deoarece testul are o acuratețe de 90%;

pî(b) = 1/10, deoarece o persoană din zece are boala B; și pî(t) = 18/100, conform părții 1.

Conform relațiilor dintre probabilități inverse,



Capitolul 13

Închiriezi o mașină. Dacă nu îți faci asigurare și ai un accident, reparația te va costa 1 500 de dolari. Dacă îți faci asigurare și ai un accident, reparația te va costa 300 de dolari. Asigurarea costă 90 de dolari și estimezi că probabilitatea unui accident este de 0,05%. Presupunând că singurele considerații sunt cele financiare, ar trebui să îți faci asigurare?

Să introducem informația într-un tabel, astfel:

	Ai un accident	Nu ai un ac
Îți faci asigurare (f) Nu îți faci asigurare (¬f)	0,05\–390 0,05\–1 500	0,95\–90 0,

Calculând expectativele, obţinem:

$E(f) = 0{,}05 \times (-390) + 0{,}95 \times (-90) = -105$

$E(\neg f) = 0{,}95 \times (-1\,500) + 0{,}95 \times 0 = -75$

Cum $E(\neg f) > E(f)$, nu ar trebui să îţi faci asigurare.

Capitolul 14

Ce este greşit în privinţa următorului argument? Desigur, există un argument pentru a stabili dacă un program cu o anumită informaţie introdusă se termină. Derulăm, pur şi simplu, programul cu informaţia respectivă şi vedem ce se întâmplă. Programul fie se va termina, fie nu. În orice caz, vei avea un rezultat.

Cu siguranţă putem derula programul cu informaţiile introduse date. Dacă el se termină, atunci o va face mai devreme sau mai târziu şi atunci vom şti dacă se termină (deşi am putea să nu ştim dinainte de cât timp va avea nevoie pentru aceasta). Dacă el nu se termină însă, nu vom şti niciodată asta. Oricât de mult a durat calculul, dacă el nu s-a terminat ar putea fi din cauză că nu se va termina niciodată; dar la fel de bine el e pe cale să se termine, deşi încă nu am ajuns acolo. Nu există nici o modalitate de a şti în care dintre aceste situaţii ne găsim.

Capitolul 15

Să spunem că un sistem de axiome are proprietatea de disjuncţie doar dacă cineva poate demonstra oricând ceva de forma A ∨ B, cineva poate demonstra fie A, fie B (sau ambele). Să presupunem că avem un sistem de axiome coerent pentru aritmetică, ale cărui teoreme sunt toate adevărate şi a cărui logică este cea din capitolul 2. Poate avea el proprietatea de disjuncţie? (Indiciu: foloseşte faptul că în această logică principiul terţului exclus este valid – adică logica poate demonstra orice de forma A ∨ ¬ A. Apoi foloseşte propoziţia G a lui Gödel.)

Nu. Dacă n este codul propoziţiei ¬∃xDem(x, n), atunci dat fiind că logica poate stabili principiul terţului exclus, teoria poate demonstra că ¬∃xDem(x, n) ∨ ¬∃xDem(x, n). Dar teorema lui Gödel arată că ¬∃xDem(x, n) nu poate fi demonstrată, deşi este adevărată. Dar atunci ¬∃xDem(x, n) este falsă; prin urmare nici ea nu poate fi demonstrată.

Bibliografie

Copeland, B.J., „Computable Numbers: A Guide“, pp. 5–57, în B.J. Copeland (ed.), The Essential Turing (Oxford: Oxford University Press, 2004)

Dawson, John W., Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel (Wellesley, MA: A. K. Peters, Ltd., 1997)

Gracely, E.J., „Playing Games with Eternity: the Devil’s Offer“, Analysis 48 (1988), p. 113

Haack, S., Deviant Logic (Cambridge: Cambridge University Press, 1974)

Heath, P., „Nothing“, pp. 524–525, vol. 5 din P. Edwards (ed.), Encyclopedia of Philosophy (Londra: Macmillan, 1967)

Heath, P., The Philosopher’s Alice (New York, NY: St Martin’s Press, 1974)

Hick, J., Arguments for the Existence of God (Londra: Collier-Macmillan Ltd, 1964)

Hodges, A., „Alan Turing“, în E. Zalta (ed.), Stanford Encyclopedia of Philosophy, https://plato.stanford.edu/entries/turing/, 2013

Hodges, W., Logic (Londra: Penguin Books, 1977)

Howson, C. și Urbach, P., Scientific Reasoning: the Bayesean Approach (La Salle, IL: Open Court, 1989)

Hughes, G.E. și Cresswell, M., A New Introduction to Modal Logic (Londra: Routledge, 1996)

Jeffrey, R., The Logic of Decision (Chicago: University of Chicago Press, ediția a 2-a, 1983)

Kneale, W. și M., The Development of Logic (Oxford: Clarendon Press, 1975)

Lemmon, E.J., Beginning Logic (Londra: Thomas Nelson and Sons Ltd, 1971)

Mellor, D.H., Real Time (Cambridge: Cambridge University Press, 1981, ediția a 2-a, Londra: Routledge, 1998)

Øhrstrøm, P. și Hasle, P.F.V., Temporal Logic: from Ancient Ideas to Artificial Intelligence (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995)

Piccini, G., „Hypercomputation“, sec. 4.3 din „Computation in Physical Systems“, în E. Zalta (ed.), Stanford Encyclopedia of Philosophy, https://plato.stanford.edu/entries/computation-physicalsystems/, 2015

Priest, G., Introduction to Non-Classical Logic (Cambridge: Cambridge University Press, ediția a 2-a, 2008)

Raatikainen, P., „On the Philosophical Relevance of Gödel’s Incompleteness Theorems“, Revue Internationale de Philosophie 59 (2005), pp. 513–534

Read, S., Thinking about Logic: an Introduction to the Philosophy of Logic (Oxford: Oxford University Press, 1994)

Sainsbury, R.M., Paradoxes (Cambridge: Cambridge University Press, ediția a 2-a, 1995)

Sanford, D.H., If P then Q: Conditionals and the Foundations of Reasoning (Londra: Routledge, 1989)

Skyrms, B., Choice and Chance (Encino, CA: Dickenson Publishing Co., 1975)

Smith, P., An Introduction to Gödel’s Theorems (Cambridge: Cambridge University Press, 2007)

Strawson, P., Introduction to Logical Theory (Londra: Methuen & Co., 1952)

Williamson, T., Vagueness (Londra: Routledge, 1994)

Zach, R., „Hilbert's Program“, în E. Zalta (ed.), Stanford Encyclopedia of Philosophy, https://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/, 2015

Zalta, E., Stanford Encyclopedia of Philosophy, https://plato.stanford.edu, 1995